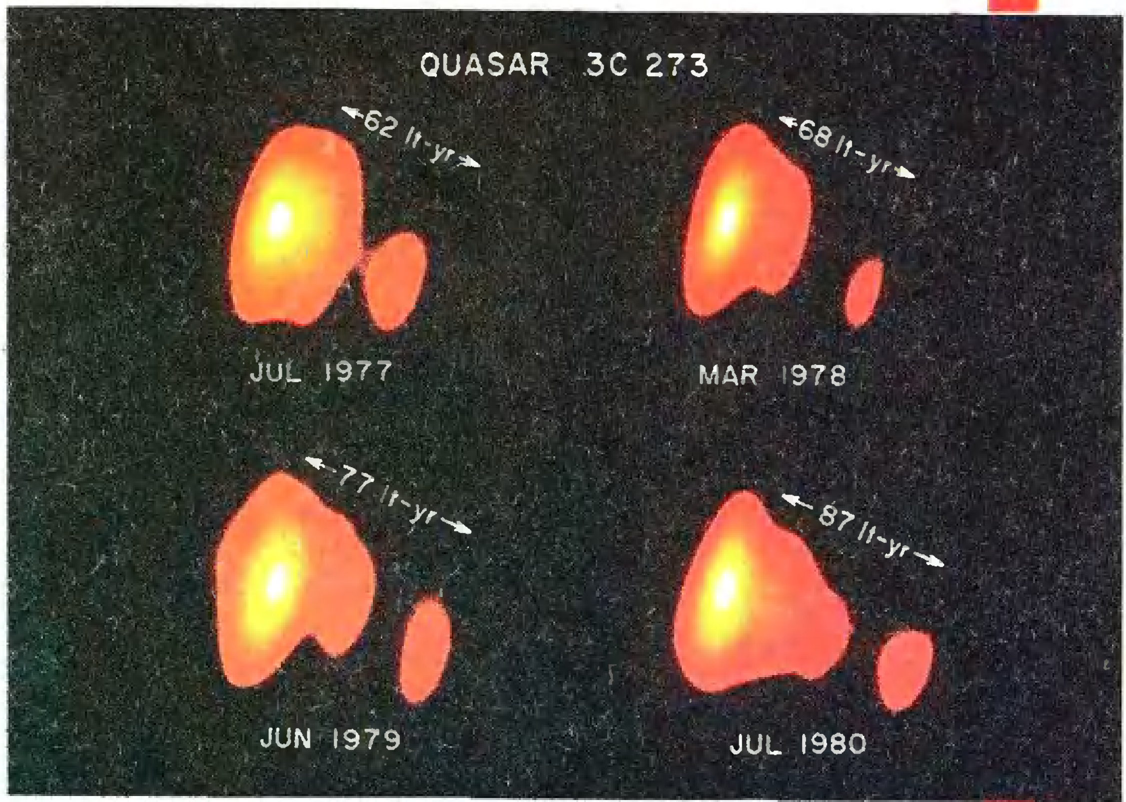
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Сверхсветовая тень и взрывающиеся квазары

1991

Квант

12 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Кажущаяся скорость удаления облака от ядра квазара 3С 273 больше скорости света. Как возникает этот парадокс, рассказано в статье на с. 2. (Снимки сделаны в Калифорнийском технологическом институте. Расстояния указаны в световых годах.)*

2 *Надеемся, что наш журнал постепенно оттачивает ваш ум, как точильщик на картине К. Малевича (1878—1935) — лезвие.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Игра «Пирамида».*

СВЕРХСВЕТОВАЯ ТЕНЬ И ВЗРЫВАЮЩИЕСЯ КВАЗАРЫ

Кандидат физико-математических наук
М. ФАЙНГОЛЬД

Начнем с рассмотрения чисто житейской (и даже несколько скучной) ситуации: идет дождь. Поскольку математическое описание любой ситуации связано с идеализацией, наш дождь несколько отличается от реального дождя: он состоит из бесконечно малых капелек, сплошь заполняющих пространство и падающих отвесно с постоянной скоростью $\vec{u}$ на горизонтальную плоскость α. Это унылое однообразие нарушается единственной приметой — непроницаемой для воды частицей S («зонтиком»), под которой в сплошной водяной пелене образуется непрерывная цепочка мелких пузырьков. Размеры зонтика, а тем самым и размеры образующихся пузырьков также будем считать пренебрежимо малыми. Поскольку внутри пузырьков нет воды, будем называть их сухими дырками. А непрерывную цепочку сухих дырок, тянущуюся от зонтика, назовем сухой нитью.

Пусть зонтик S сначала висит неподвижно на некоторой высоте над плоскостью α. Тогда положение сухой нити q определяется только направлением дождя — нить будет параллельна дождевым струям. В нашем случае она будет отвесна, и, следовательно, прямо под S на плоскости α появится защищенная от дождя площадка S'. С геометрической точки зрения, S' можно рассматривать как проекцию S на α. С точки зрения житейской, S' — единственное убежище, где находящийся на α микроскопический путник мог бы укрыться от дождя (рис. 1).

Предположим теперь, что зонтик S

Рис. 1.

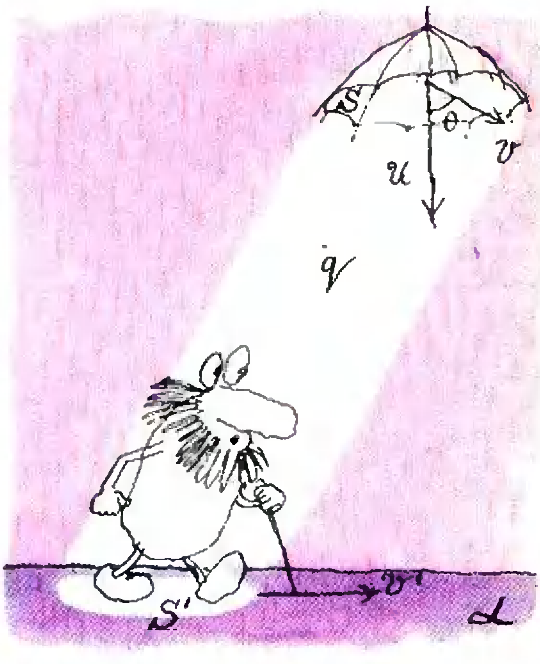


Рис. 2.

начинает двигаться с постоянной скоростью $\vec{v}$ под углом θ к отвесной линии. Это вызывает соответствующее перемещение сухой нити q и точки S'. Поэтому нашему путнику, чтобы остаться сухим, приходится двигаться вместе с S' (рис. 2). С какой скоростью должен двигаться путник?

Напрашивается «очевидный» ответ: поскольку при $v=0$ точка S' совпадает с проекцией зонтика на α, то при $v\neq 0$ она должна перемещаться со скоростью, равной проекции $\vec{v}$ на α, т. е. $v'=v\sin\theta$. Следовательно, скорость v' не может превосходить v. Далее, хотя S' будет отставать от геометрической проекции S (из-за конечной скорости «проецирующего» дождя), она, конечно, будет всегда двигаться в ту же сторону. Наконец, поскольку скорость зонтика меньше скорости света c, то и v' всегда меньше c.

Все утверждения в этом ответе неверны. В них не учтено, что при наличии у скорости $\vec{v}$ вертикальной составляющей, равной $v_{\text{н}}=v\cos\theta$, интервал времени между образованием пузырька и его падением на плоскость меняется с течением времени (т. е. различен для разных пузырьков), а это приводит к довольно неожиданным следствиям. Для их выяснения решим задачу строго.

Прежде всего следует дать четкое определение скорости v'. Это можно сделать, используя введенное выше понятие сухих дырок. Дырки непрерывно «сыпятся» от зонтика и вместе с дождем падают со скоростью u. Рассмотрим два положения зонтика S в моменты времени t_1 и t_2. В каждый из этих моментов от S отделяется сухая дырка и устремляется вертикально вниз. Обозначим момент падения первой из них на плоскость α через t_1', а второй — через t_2'. Пусть расстояние между точками падения этих дырок равно $\Delta x'$. Скоростью перемещения точки S' будет величина

$$v'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \qquad (1)$$

где

$$\Delta t'=t_2'-t_1'.$$

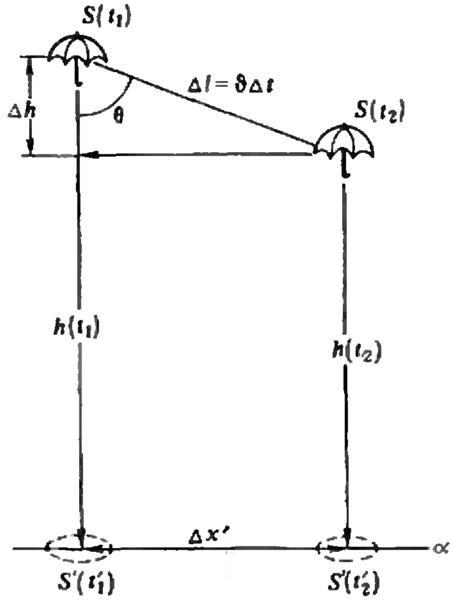


Рис. 3. Изображенные здесь одновременно четыре события $S(t_1)$, $S(t_2)$, $S'(t_1')$ и $S'(t_2')$ на самом деле происходят в разное время.

Найдем, как зависит величина v' от u, v и θ (рис. 3). Расстояние между положениями зонтика в моменты t_1 и t_2 равно $\Delta l=v\Delta t=v(t_2-t_1)$, поэтому

$$\Delta x'=\Delta l\sin\theta=v\,\Delta t\sin\theta. \qquad (2)$$

Соответствующая разность высот в эти моменты равна $\Delta h=\Delta l\cos\theta=v\Delta t\cos\theta$. Промежуток времени $\Delta t'$ между моментами падения дырок на

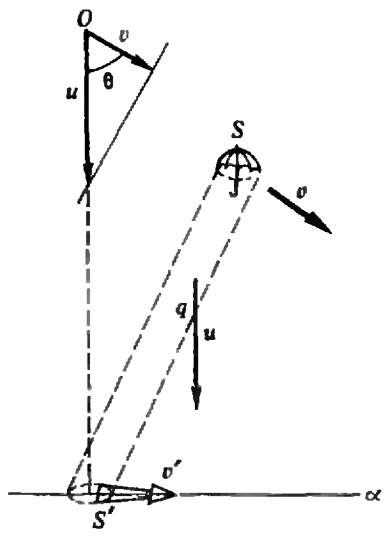


Рис. 4.

плоскость α отличается от промежутка Δt между моментами их испускания на величину $\Delta h/u = \Delta t_{12}$:

$$\Delta t' = \Delta t - \Delta t_{12} = \Delta t\left(1 - \frac{v}{u}\cos\theta\right). \qquad (3)$$

Формула (3) совпадает с известным выражением для классического эффекта Доплера, согласно которому период $\Delta t'$ между последовательными сигналами от движущегося источника меняется на $v_{\parallel}/u$ своей величины Δt в случае неподвижного источника. Здесь $v_{\parallel} = v\cos\theta$ — продольная (т. е. параллельная лучу зрения) составляющая скорости источника, u — скорость сигнала. Роль сигнала в нашем случае играют сухие дырки, источником которых служит частица S. Из-за явной зависимости $\Delta t'$ от продольного движения источника соответствующий эффект называют продольным эффектом Доплера.

Подставляя теперь выражения (2) и (3) в формулу (1), находим

$$v' = \frac{v\sin\theta}{1 - \frac{v}{u}\cos\theta}. \qquad (4)$$

Тот же результат можно получить с помощью понятия о сухой нити, замечая, что S' возникает при пересечении нити с плоскостью α. Нить сносится дождем со скоростью $\vec{u}$, а источник, из которого она «вытягивается», движется со скоростью $\vec{v}$. В итоге нить, падая, остается параллельной вектору $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, и задача сводится к нахождению скорости точки ее пересечения с плоскостью α (рис. 4). Эта задача решается достаточно просто, и мы предлагаем читателю убедиться, что ее решение приводит к формуле (4).

А теперь посмотрим, что говорит эта формула.

Во-первых, видно, что если знаменатель достаточно мал, то величина v' может оказаться сколь угодно большой, и, в частности, превзойти скорость света. Этот вывод не противоречит законам природы, так как относится к «объекту», который не является одним физическим телом. Действительно, два разных положения точки S' на плоскости α обусловлены падением на α двух *разных* сухих дырок; а на промежуток времени между такими событиями в природе нет никаких ограничений. Так что может оказаться, что нашему путнику, чтобы остаться сухим, надо мчаться во весь дух, даже если зонтик S еле движется, а при $v' > c$ путник, каким бы он ни был резвым, вообще не удержится на точке S': сверхсветовая скорость не может быть достигнута материальным телом.

Во-вторых, если $1 - \frac{v}{u}\cos\theta < 0$, то точка S' будет двигаться против геометрической проекции зонтика. Например, при смещении зонтика к востоку, путнику, чтобы избежать насморка, придется бежать на запад!

Оба эти результата становятся совершенно наглядными, если воспользоваться представлением о сухой нити q, падающей на плоскость α (см. рис. 4). Мы уже знаем, что возникающая при этом точка пересечения нити с плоскостью может двигаться сколь угодно быстро. В частности, когда $v_{\parallel} = v\cos\theta = u$, нить q параллельна плоскости α и падает на нее одновременно всеми своими точками (формула (3) при этом дает $\Delta t' = 0$). Это значит, что точка S' прочерчивает свою траекторию на плоскости α мгновенно, т. е. $v' \to \infty$ (рис. 5). Обратное

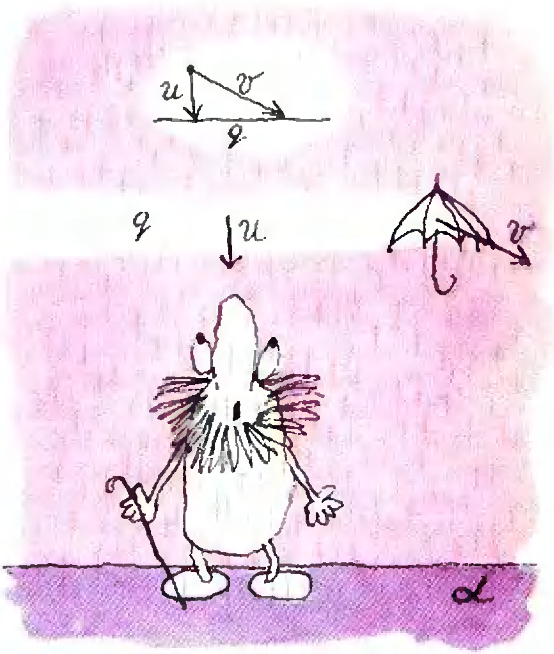


Рис. 5.

движение точки S' возникает при $v_{\parallel} > u$; геометрически это означает, что зонтик S падает *быстрее* дождя, обгоняя дождевые капли, так что создаваемая им сухая нить остается выше S (рис. 6, *а*). При этом из формулы (3) следует $\Delta t' < 0$, т. е. та из двух дырок, которая была испущена раньше другой, падает на плоскость α позже. Легко видеть, что в этом случае точка S' на плоскости α впервые возникает в момент падения самого́ зонтика S и удаляется от места падения в ту сторону, откуда летел зонтик (рис. 6, *б*).

В условиях нашей задачи допустимы видоизменения. Например, можно заменить дождь отвесно падающими лучами света. Тогда в формуле (4) скорость u заменится на c, и формула для v' примет вид

$$v' = \frac{v \sin\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}. \qquad (5)$$

При этом сухая дырка превратится в темную дырку, а сухая прямая — в темную прямую (тень от зонтика). Знаменатель в выражении (5) всегда положителен, так как $v < c$, следовательно, тень S' (лучевая проекция зонтика) может двигаться лишь в ту же сторону, что его геометрическая проекция. Однако скорость этого движения тоже может быть сверхсветовой, если правая часть выражения (5) больше c, т. е. если

$$\frac{\beta\sin\theta}{1 - \beta\cos\theta} > 1, \text{ где } \beta = \frac{v}{c}. \qquad (6)$$

Нетрудно определить область значений v и θ, при которых имеет место неравенство (6). Эта область показана на рисунке 7 (окрашенный сегмент). Если направление и величина скорости зонтика таковы, что точка v, θ оказывается внутри сегмента, то тень зонтика движется со сверхсветовой скоростью. Соответствующее явление может быть названо сверхсветовой тенью. Как видно из рисунка 7, в условиях данной задачи такая тень может появиться при движении зонтика со скоростью, превышающей $c/\sqrt{2}$.

Математическая формулировка задачи не изменится, если «поменять знаки» в физических условиях: падающий световой поток заменить тьмой, а отбрасываемый частицей S наклонный столб тени (прямая q) — световым лучом, который состоит из

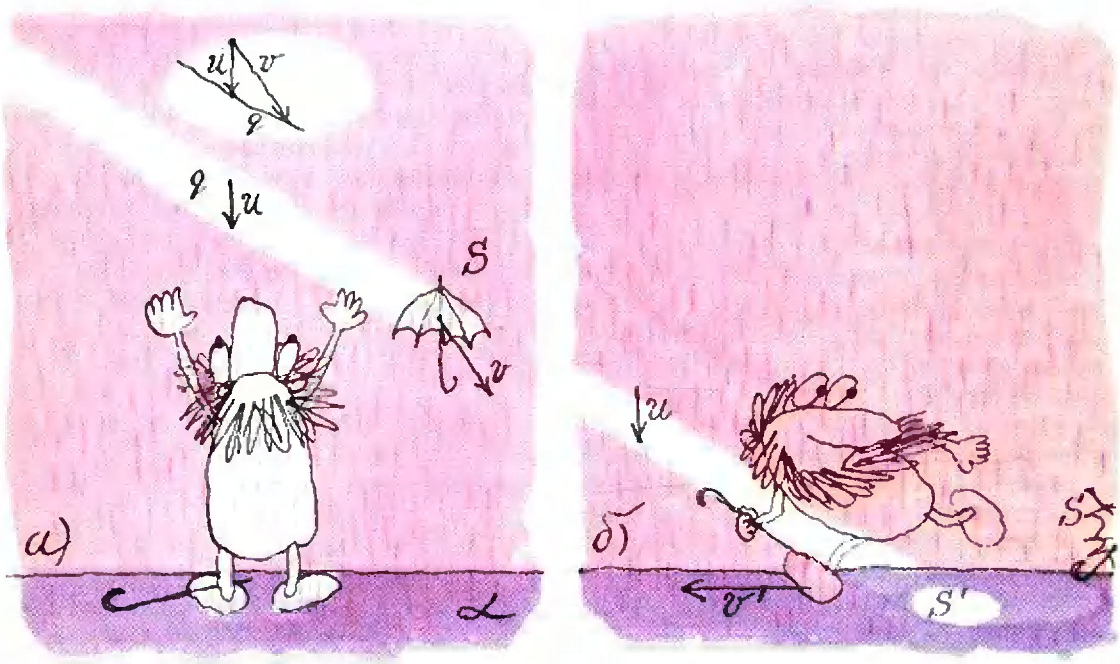


Рис. 6. а) до падения зонтика на плоскость α; б) после падения.

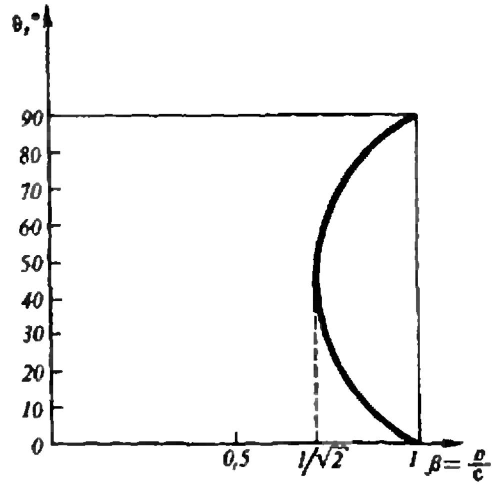


Рис. 7. Закрашенная область соответствует величинам и направлениям скорости объекта, при которых его оптическая проекция движется быстрее света, т. е. образуется сверхсветовая тень.

световых частиц — фотонов, падающих из источника S только в одном направлении — вертикально вниз в системе координат, где плоскость α неподвижна (представление о фотонах как о точечных частицах неверно, но в данной задаче это не приводит к ошибкам). Луч q — это мгновенное положение всех фотонов, испускаемых источником S вертикально вниз в разные моменты времени. Этот луч освещает на плоскости α точечное пятно S'. Пятно S' становится изображением соответствующего положения источника S, которое он занимал в момент испускания света, попавшего в S'. При этом наша задача из пустячной математической безделушки превращается в модель наблюдения грандиозного астрофизического процесса.

Представим себе, что произошел взрыв далекого космического объекта и во все стороны от взрыва разлетаются сгустки горячей светящейся плазмы. Один из сгустков (S) движется к нам со скоростью v под углом θ к лучу зрения, проведенному к взорвавшемуся объекту. Тогда изображение сгустка на плоскости α, спроецированное лучом q, движется вдоль плоскости со скоростью v', описываемой формулой (5). Но, согласно этой формуле, при значениях v и θ, удовлетворяющих неравенству (6), скорость v' будет больше c. И если судить об эффекте только по его видимому результату, мы придем к неверному выводу о сверхсветовой скорости самого сгустка. Этот «наблюдательный» эффект получил название релятивистского пушечного ядра. Например, если релятивистское пушечное ядро движется почти прямо к наблюдателю, то наблюдателю кажется, что оно движется в плоскости, перпендикулярной лучу зрения (ее называют картинной плоскостью), со сверхсветовой скоростью.*)

Можно привести простой пример, наглядно поясняющий причину такого эффекта. Пусть релятивистский плазменный сгусток движется к Земле со скоростью, равной 99 % световой, но не прямо на нас, а немного в сторону, так что за 300 лет он переместится в картинной плоскости на 25 световых лет от места взрыва. Но при этом вдоль луча зрения он приблизится к нам на $300 \cdot 0{,}99 \approx 297$ световых лет. Поэтому излучение из нового положения сгустка придет к нам не через 300 лет после первого наблюдения, а через $300 - 297 = 3$ года. Следовательно, земному наблюдателю покажется, что сгусток сместился в картинной плоскости на 25 световых лет всего за 3 года, т. е. двигался со скоростью порядка восьми световых! Но эта скорость действительно кажущаяся, так как при ее вычислении использован интервал времени $\Delta t'$ между поступлением сигналов к наблюдателю, который (благодаря приближению источника) может быть во много раз меньше интервала времени Δt между испусканием этих сигналов (продольный эффект Доплера).

*) Конечно, описанная схема дает весьма упрощенную (и не совсем адекватную) картину реального астрономического наблюдения. Реальный источник излучает *во всех* направлениях, что и позволяет наблюдать различные его положения. Из-за чрезвычайной удаленности источника его изображение на фотопластинках смещается на доли миллиметра в год даже в рассматриваемых здесь условиях. Скорость соответствующего движения в картинной плоскости α, которую следует представить находящийся в области движения самого источника, вычисляется по смещению изображения на фотопластинке с учетом расстояния до источника и может превосходить величину c.

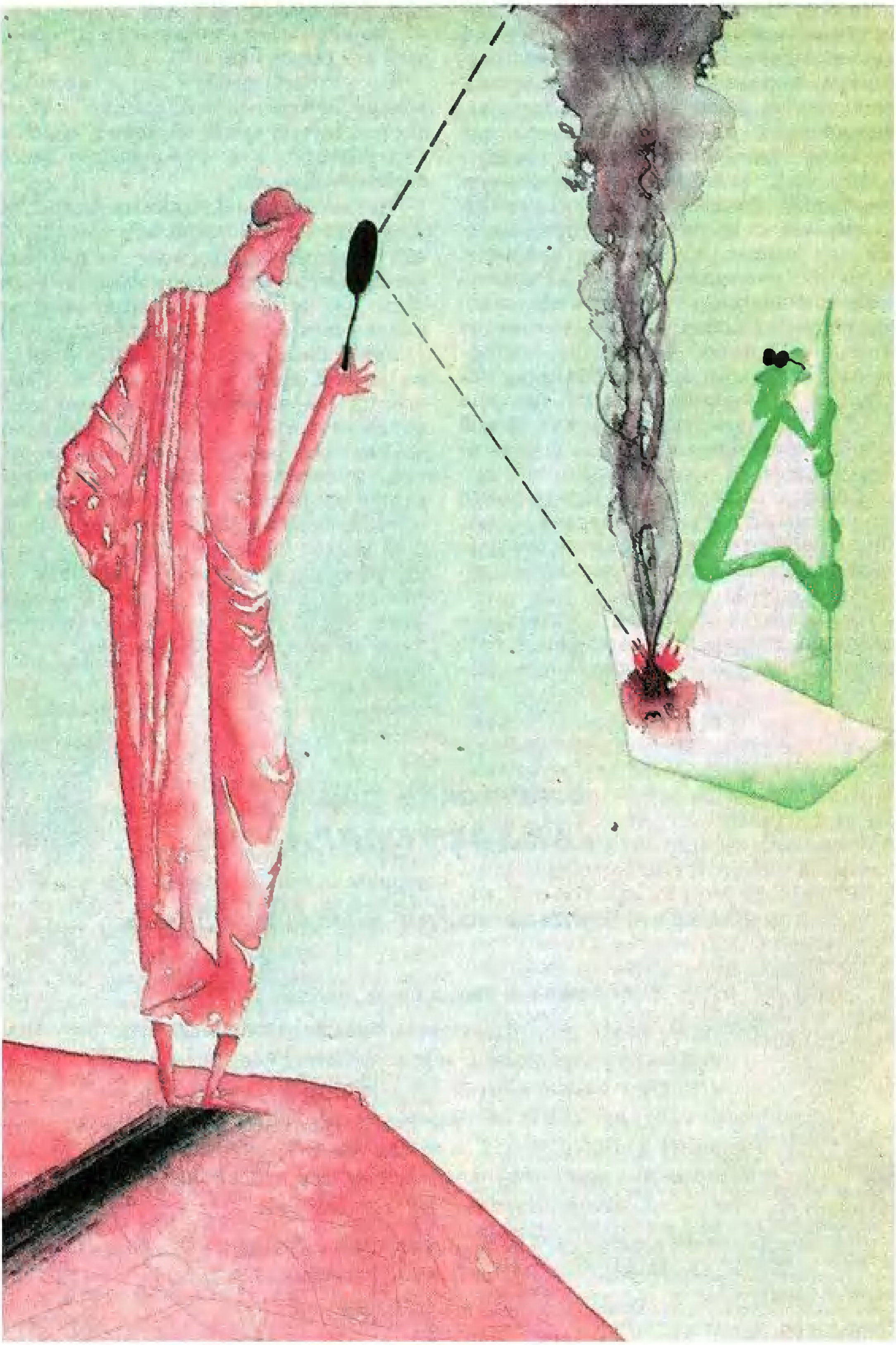
Таким образом, мы приходим к несколько парадоксальному выводу, что кажущаяся сверхсветовая *поперечная* скорость по сути есть проявление *продольного* эффекта Доплера. Возможность такого необычного проявления была предсказана еще в 1966 году английским астрономом Мартином Рисом, однако в течение длительного времени это предсказание не вызывало особого интереса.

Но вот в начале 1971 года появилось сообщение сотрудника Массачусетского технологического института Ирвина Шапиро, поразившее астрономов, как удар грома. Шапиро наблюдал радиоизлучение от квазара 3 С 279 для измерения эффекта общей теории относительности — отклонения радиоволн в гравитационном поле Солнца. При этом он использовал высокосовершенное устройство — радиоинтерферометр сверхвысокого разрешения, позволявший различать отдельные детали квазара.

Из наблюдений Шапиро, к тому моменту беспрецедентных по своей точности, следовало, что отдельные компоненты квазара 3 С 279 разлетаются со скоростью, примерно в 10 раз большей скорости света!

К сегодняшнему дню подобное «сверхсветовое» расширение наблюдается уже по крайней мере у нескольких квазаров (см. фотографию на обложке журнала).

Разумеется, подавляющее большинство физиков и астрономов убеждены, что здесь перед нами вовсе не реальное сверхсветовое движение тел, а скорее всего — лишь проявление эффекта релятивистского пушечного ядра. Но удивительно, что такое пушечное ядро на самом деле реализуется в космических масштабах! Ведь одно дело, когда речь идет о релятивистских скоростях отдельных элементарных частиц, и совсем другое — наблюдать такие скорости у сгустков вещества с массой, возможно в миллион раз большей массы Солнца! Какие силы смогли разогнать до такой скорости гигантскую массу вещества? Не исключено, что с этого вопроса начинается путь к новым неожиданным открытиям.



СОЖЖЕМ ЧТО-НИБУДЬ?

Кандидат технических наук
А. КРЕМЕР

Однажды мне попала в руки любопытная книга под названием «О возможном и невозможном в оптике». Ее автор, крупный специалист в области оптических расчетов профессор Г. Слюсарев задумал книгу как своеобразное предупреждение тем горе-изобретателям, которые, не разобравшись в фундаментальных научных принципах, пытаются облагодетельствовать человечество с помощью неосуществимых технических приспособлений.

Центральное место в книге по праву занимало ниспровержение «тонких как игла» световых пучков и световых сжигателей на расстоянии. Оба эти проекта насчитывают многовековую историю — начиная с легенды об Архимеде, который сжег солнечным зайчиком неприятельский флот, и кончая знаменитым гиперболоидом инженера Гарина. Вот заключение этой главы в книге: «Автору хотелось бы надеяться, что ему удалось убедить читателя в невозможности в ближайшие годы решить задачу о сжигании далеких предметов с помощью оптических систем. Методы расчета, изложенные выше, настолько общи, что сомневаться в них можно, сомневаясь в основных принципах природы».

Пикантность ситуации (что меня и привлекло) заключалась в том, что книга увидела свет в 1960 году, т. е. именно в тот момент, когда в лабораториях физиков появились те самые источники тонких как игла световых пучков и сжигатели на расстоянии — лазеры!

Я вспоминаю, как один школьный учитель физики, искренне полагая, что раздел программы «Энергетика в СССР» неотделим от журналистских штампов, заставлял учеников заучивать «названия» видов топлива: нефть — черное золото, газ — голубой уголь и т. д. В этом же ряду и «лазеры — чудо XX века». Для непосвященных, действительно, лазеры — это осуществленная идея инженера Гарина, и, следовательно, одним фактом своего существования они повергают в прах доводы уважаемого профессора и «заставляют сомневаться в основных принципах природы». С другой стороны, классическая геометрическая оптика и фотометрия преспокойно существуют и не думают погибать под ударами лазерной физики. Так что здесь не все так просто, и начать придется с азов, тем более что фотометрия полностью изгнана со страниц школьных учебников.

В оптике существует понятие точечного источника. Это такая же абстракция, как и точка в геометрии. В природе, однако, существуют излучатели, дающие хорошее приближение к этой абстракции. Точечный источник, находящийся на конечном расстоянии от наблюдателя,— это возбужденный атом, а протяженный источник, находящийся на бесконечном расстоянии от наблюдателя,— это звезда. Рассмотрим площадку, на которую падает свет от звезды (рис. 1). Энергия, протекающая через эту площадку в единицу времени (мощность электромагнитной волны), называется световым потоком. Силой света источника называется отношение светового потока к телесному углу*), под которым видна площадка:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}. \qquad (1)$$

Идеальный точечный источник характерен тем, что $I = \text{const}$ и не зависит от

*) Телесный угол — это пространственный аналог простого угла на плоскости. Угол (в радианах, рад) измеряют отношением длины дуги, отсекаемой им от произвольной окружности (с центром в вершине угла), к радиусу этой окружности. Телесный угол (в стерадианах, ср) измеряют отношением площади поверхности, отсекаемой конусом от произвольной сферы (с центром в вершине конуса), к квадрату радиуса этой сферы: $\Omega = S/R^2$.

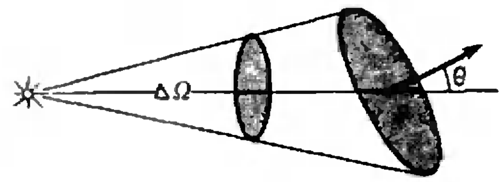


Рис. 1.

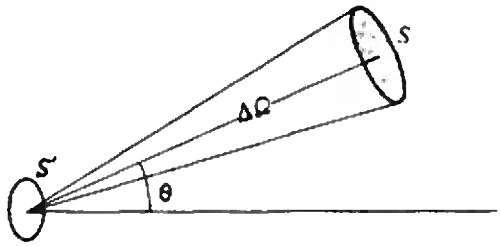


Рис. 2.

направления. Тогда, кроме (1), можно написать

$$I=\frac{\Phi}{4\pi}, \qquad (2)$$

где Φ — полный световой поток, посылаемый источником по всем направлениям, а 4π — полный телесный угол.

На небосклоне есть одна звезда, которую к точечным источникам никак не отнесешь. Это — Солнце. Оно имеет вполне заметный угловой размер — $\approx 0{,}5°$. Большинство источников света, окружающих нас, также относятся к протяженным. Протяженный источник можно рассматривать как совокупность бесконечного множества точечных источников. В таком случае, говоря о Солнце, заменим его для простоты на «гантельку»-диаметр, на концах которого находятся две светящиеся точки-звезды. Световой поток на поверхности Земли от двух звезд приблизительно вдвое больше, чем от одной. Если эту гантельку повернуть вдоль луча зрения, то одна звезда загородит другую, и световой поток не увеличится. Таким образом, световой поток от светящейся площадки зависит от ориентации этой площадки относительно луча зрения, и мы даже смогли уловить характер этой зависимости: световой поток тем больше, чем более перпендикулярно к лучу зрения развернута площадка. Кроме того, световой поток, очевидно, пропорционален площади светящейся поверхности S' и телесному углу, под которым видна приемная площадка из светящейся (рис. 2):

$$\Delta\Phi = B\cos\theta\cdot S'\,\Delta\Omega. \qquad (3)$$

Коэффициент пропорциональности B — это еще одна важная фотометрическая величина, называемая яркостью. Для данного случая величину

$$I=BS'\cos\theta \qquad (4)$$

естественно назвать силой света. Заметим сразу, что, хотя понятие силы света применимо и к точечному, и к протяженному источнику, понятие яркости к точечному источнику неприменимо: у последнего нет ни размера, ни ориентации. Яркость измеряется, как правило, в специальных единицах — стильбах (сб). Величины яркостей некоторых источников приведены в таблице:

Источник света	Яркость, сб
полная Луна	0,25
пламя свечи	0,5
люминесцентная лампа	0,6
лампа накаливания	600—1300
Солнце в зените	$1{,}6\cdot 10^5$
искра разряда в газе	$\approx 10^7$

Вы уже заметили, наверное, одну странность в этой таблице: из опыта мы знаем, что люминесцентная лампа дает практически столько же света, сколько и лампа накаливания, но яркость ее оказывается на три порядка ниже. Однако никакой ошибки здесь нет: люминесцентная лампа на самом деле весьма тусклый источник, просто у нее очень большая излучающая площадь!

Если светящаяся поверхность состоит из одинаковых идеальных точечных источников света, то оказывается, что $B=\text{const}$ и не зависит от направления. Такие источники называются ламбертовскими. Хорошими примерами ламбертовского источника являются Солнце и идеально рассеивающая поверхность. Зависимость силы света от направления для такого источника (согласно (4)) изображена на рисунке 3.

Для дальнейшего нам понадобится еще одна фотометрическая величина — освещенность, характеризующая воздействие излучения на приемную площадку:

$$E=\frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \qquad (5)$$

Посмотрим теперь, что происходит со световой энергией при преобразовании светового пучка оптической системой. В качестве примера последней мы возьмем просто линзу. Все наши выводы целиком будут приложимы и к сферическим зеркалам. Пусть источник яркостью B и площадью S', расположенный на расстоянии a перед собирающей линзой площадью Q, отображается в площадку S (рис. 4). Имеем для светового потока, падающего на линзу:

$$\Phi=BS'\Omega=BS'\frac{Q}{a^2}. \qquad (6)$$

Этот же поток падает на изображение. Поэтому освещенность изображения

$$E=\frac{\Phi}{S}=\frac{BS'Q}{a^2S}. \qquad (7)$$

Однако, по формуле для увеличения линзы $S'/S=a^2/b^2$, где b — расстояние от изображения до линзы. Следовательно,

$$E=\frac{BQ}{b^2}. \qquad (8)$$

Этой формулой, полученной нами вслед за французским инженером Манженом (1825—1885), мы закончим теоретическое введение. Перейдем теперь к настоящему делу.

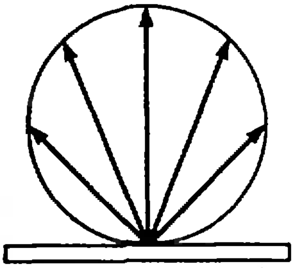


Рис. 3.

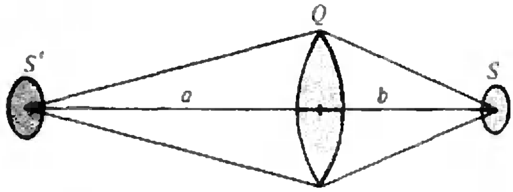


Рис. 4.

Попробуем что-нибудь сжечь, например деревяшку. Любой из вас наверняка это делал в детстве с помощью Солнца и линзы. Поскольку Солнце далеко, то его изображение получается в фокальной плоскости линзы. Из формулы (8) получаем

$$E=B_{\odot}\frac{\pi D^2}{4F^2}, \qquad (9)$$

где D — диаметр линзы, F — ее фокусное расстояние, а $B_{\odot}$ — яркость Солнца. Или

$$E=0{,}8B_{\odot}K^2, \qquad (10)$$

где $K=D/F$ — относительное отверстие линзы. Опыт показывает, что линза с относительным отверстием 1:10 способна поджечь деревяшку. Следовательно, для загорания дерева необходимо обеспечить освещенность не менее чем

$$E'=10^{-2}B_{\odot}. \qquad (11)$$

Для того чтобы сжечь что-то более существенное, надо увеличивать относительное отверстие линзы. Однако — это палка о двух концах. При увеличении K начинают сказываться аберрации (искажения) линзы, изображение расплывается и освещенность может не увеличиваться или даже уменьшаться. Однако в сложных фокусирующих системах можно добиться хорошего качества изображения при больших K, и при этом концентрация солнечной энергии получается такой, что плавятся даже металлы. Подобная гелиопечь была создана у нас в Средней Азии.

Но! Все это происходит «под носом» у оптической системы, а нас, как мы договорились, интересует сжигание на расстоянии. Ну, хотя бы в один километр. Пусть диаметр сжигателя-линзы или зеркала будет 2 метра (куда уж больше?!). Тогда из (8) и (11) следует, что яркость источника, который должен стоять в нашем сжигателе, составляет

$$B = 10^4 B_{\odot}.$$

Есть лишь один источник, который «ярче тысячи солнц»,— это ядерный взрыв. Но этот источник, пожалуй, слишком экзотичен, к тому же он и так сжигает все вокруг без всякой оптики. Никакие ухищрения, типа многокомпонентной оптической системы или зеркала, состоящего из многих маленьких, сфокусированных в одну точку, не позволяют обойти формулу (8), и мы приходим к печальному заключению, сформулированному в цитате из книги «О возможном и невозможном в оптике» в начале статьи.

А как же лазеры? Как им удается обойти формулу (8)? Ответ кроется в устройстве лазеров. Схематически лазер можно представить себе как два зеркала, из которых одно глухое, а другое полупрозрачное. Между зеркалами расположена активная среда (газ или твердое тело), энергетические состояния атомов которой отвечают особым «лазерным» условиям. В активной среде с помощью внешнего воздействия (свет, электрический разряд, химические реакции) возбуждается излучение. В результате взаимодействия возбуждаемого излучения с активной средой и зеркалами из лазера вырывается тот самый узкий как игла пучок излучения, который при соответствующих характеристиках может сжечь на значительном расстоянии что угодно.

Почему же он таким получается? Мы уже говорили, что любой протяженный источник света представляет собой совокупность светящихся точек, под которыми можно подразумевать атомы и группы атомов. В обычном источнике все эти элементарные излучатели испускают фотоны вразнобой, не обращая внимания друг на друга. В лазере, наоборот, все атомы излучают согласованно, синхронно, или, выражаясь по-научному, когерентно. Все фотоны здесь имеют одинаковую частоту и, что самое главное, одинаковую фазу. Можно считать, что все атомы активной среды лазера действуют как один атом, вобравший в себя энергию всех своих составляющих. Обычный источник можно уподобить ракете со многими двигателями, которые направлены наобум, вкривь и вкось. Такая ракета тратит бо́льшую часть своих сил впустую. У лазера-ракеты все двигатели направлены в одну сторону, чем и обеспечиваются его необыкновенные свойства. Волновые фронты электромагнитной волны, исходящей от обычного источника, рваные и хаотически меняющиеся. Волновые фронты лазерного луча регулярные и четко сформированные.

Какой же вид они имеют? Это самый важный и принципиальный момент. Можно подумать, что они представляют собой плоскости и, следовательно, световые лучи (перпендикуляры к волновым фронтам) — идеальные параллельные прямые, которые, не расходясь, распространяются до бесконечности. В действительности, однако, параллельных световых лучей не бывает. Идеально плоский волновой фронт должен был бы иметь бесконечные поперечные размеры. Стоит нам только ограничить размер плоской волны, как она тут же становится расходящейся из-за дифракции на этом размере. Волновой фронт лазерного пучка, конечно же, ограничен поперечными размерами активной среды. Если он в каком-то месте между зеркалами и плоский (что, кстати, часто имеет место), то дальше он уже будет пред-

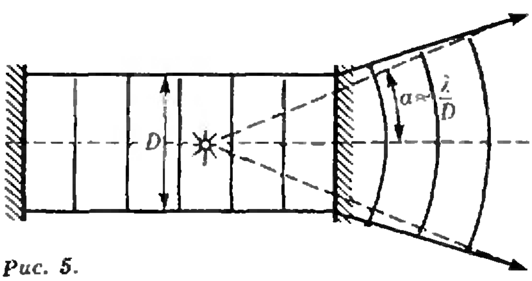


Рис. 5.

ставлять собой участок сферы. Но точно такой же фронт имеет точечный источник, расположенный где-то внутри лазера (рис. 5): это тот самый воображаемый сверхмощный атом, которому лазер эквивалентен. Мы уже обсуждали выше проблемы, связанные с реальными прототипами точечных источников. Если он очень маленький (атом), то его можно расположить на конечном расстоянии от наблюдателя. Если же он большой, то его приходится уносить на бесконечность (звезда). И в том и другом случае до наблюдателя доходит мизерное количество энергии. В новом точечном источнике — лазере удалось совместить несовместимое: конечное расстояние до наблюдателя и большую энергию.

Вот и ответ на загадку лазера. Формула (8) к нему просто не применима, поскольку, как мы уже говорили, понятие яркости на точечные источники не распространяется.

Посмотрим теперь, на что практически способен лазер. Общий принцип дифракции гласит, что угол, на который отклоняются дифрагировавшие на каком-то препятствии лучи, имеет порядок величины $\alpha = \lambda/D$, где D — характерный размер препятствия, а λ — длина волны. Такой приблизительно и будет расходимость лазерного пучка, коль скоро она обусловлена дифракцией. Грубо можно считать, что на расстоянии L диаметр лазерного пучка будет равен

$$d = D + L\,\frac{\lambda}{D}. \qquad (12)$$

Возьмем лазер с диаметром пучка 1 см и длиной волны 1,06 мкм. (Мы рассматриваем для определенности твердотельный лазер с кристаллом алюмоиттриевого граната в качестве активной среды.) На расстоянии в 1 км диаметр пучка, согласно (12), возрастает в 10 раз, однако остается еще весьма малым: $d' \approx 10$ см. Подставим теперь под этот пучок все ту же деревяшку и оценим мощность лазера W, необходимую для того, чтобы ее сжечь. Имеем, согласно (5) и (11),

$$E' = \frac{W}{\pi (d'/2)^2};\ W = 8\cdot 10^{-5} B_{\odot}. \qquad (13)$$

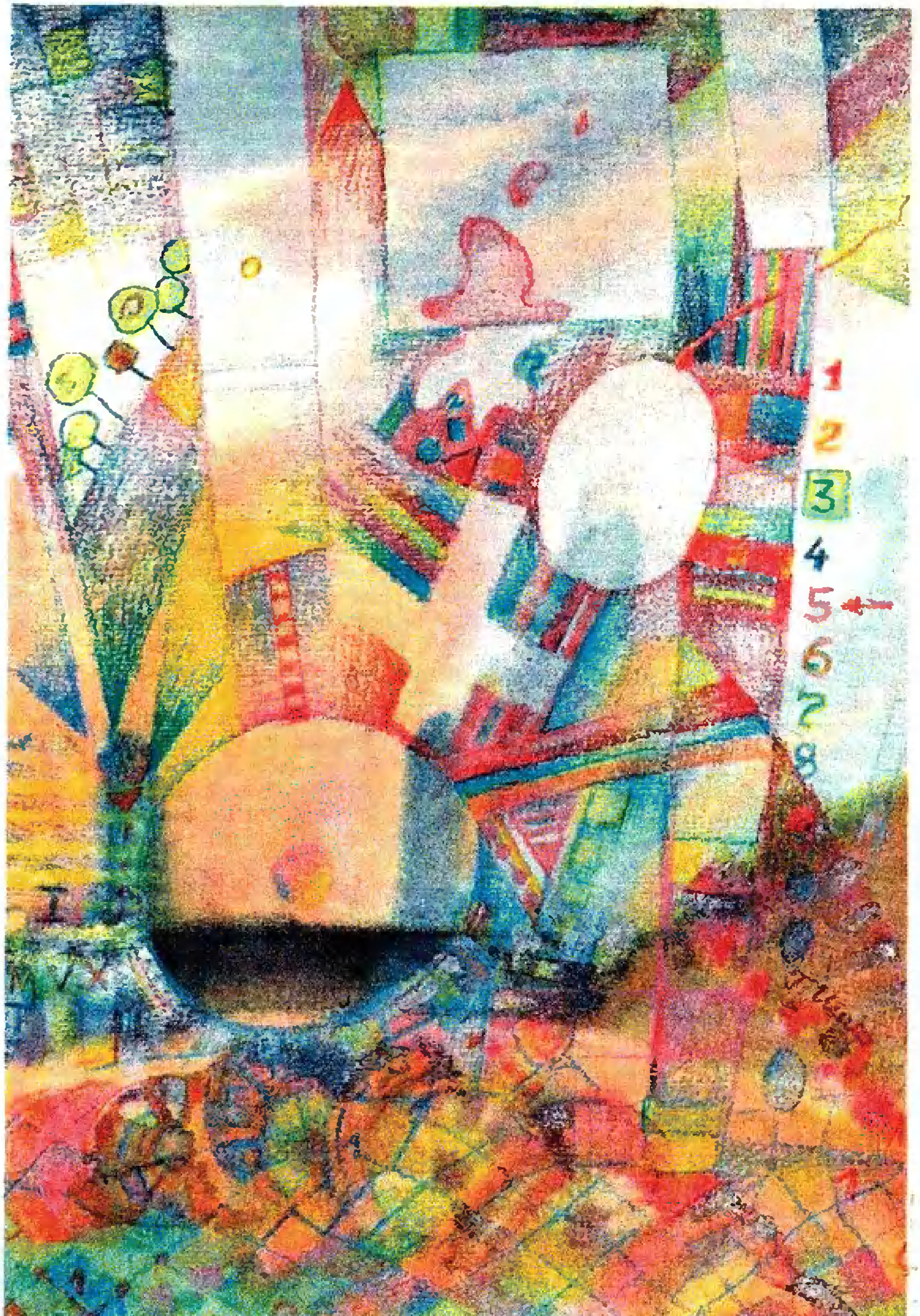
Мощность лазера принято выражать в энергетических единицах, а яркость Солнца, приведенная в нашей таблице, дана в световых единицах. Связь между световыми и энергетическими величинами не столь однозначна, как, скажем, связь между калориями и джоулями: она зависит от спектра источника. В частности, для Солнца

$$B_{\odot} = 2\cdot 10^7\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{ср}}.$$

Таким образом, из (13) окончательно получаем

$$W = 1{,}6\ \text{кВт}.$$

Такая мощность вполне доступна для лазера-сжигателя. Такие же (и даже гораздо бо́льшие) мощности доступны и обычным источникам света (прожекторам), однако сжигателя, как мы видели, из них не получается.


1
2
3
4
5
6
7
8

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Доктор физико-математических наук
И. ЯГЛОМ

Ключевые числа

Первые девять натуральных чисел мы обозначаем специальными знаками

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Поступать таким же образом со всеми встречающимися на практике числами было бы неудобно. Даже если бы наши потребности ограничивались счетом в пределах тысячи, надо было бы запомнить тысячу специальных знаков. Естественно, что уже давно люди стали выбирать тот или иной ряд «ключевых» чисел и только их обозначать специальными знаками. Такова, например, римская система счисления (нумерация), основанная на ключевых числах

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

Эти числа в римской системе счисления обозначают буквами

I («и»), V («ве»), X («икс»), L («эль»), C («це»), D («де»), и M («эм»).

Такие обозначения частично произошли от рисунков, изображавших

некогда соответствующие числительные (I — палец, V — пятерня с расставленными пальцами, X — две пятерни), а частично являются сокращениями латинских слов (centum — сто, demimille — пятьсот, mille — тысяча).

Так как римская система нумерации нужна нам только для примера, мы рассмотрим ее в более древнем, упрощенном варианте, когда число «четыре» писалось в виде IIII, а не в виде IV. Число 3477 в этой староримской системе записывается так:

$$\mathrm{MMMCCCCLXXVII} = 3\cdot 1000 + 4\cdot 100 + 50 + 2\cdot 10 + 5 + 2.$$

Аналогично поступает кассир, имеющий денежные купюры достоинством в 100 рублей, 50 рублей, 25 рублей, 10 рублей, 5 рублей, 3 рубля и 1 рубль. Для кассира ключевыми являются числа

100, 50, 25, 10, 5, 3 и 1.

Желая выплатить, скажем, 499 рублей, он выдает сначала столько сотенных бумажек, сколько возможно, чтобы не выдать лишнего:

$$499 = 4\cdot 100 + 99$$

Затем он выдает столько купюр по 50 рублей, сколько возможно, чтобы выдать не более оставшихся к выплате 99 рублей:

$$499 = 4\cdot 100 + 1\cdot 50 + 49,$$

и т. д. Иногда у него может получиться остаток меньше, чем следующее ключевое число. Так будет в нашем примере после выдачи двух десятирублевок:

$$499 = 4\cdot 100 + 1\cdot 50 + 1\cdot 25 + 2\cdot 10 + 4.$$

Следующее ключевое число равно 5, однако так как $4 < 5$, то пятирублевок выдавать не придется. Но для полноты картины можно считать, что было выдано 0 пятирублевок, и вклю-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 6 за 1970 год.

чить в сумму слагаемое $0 \cdot 5$. Вся процедура выдачи 499 рублей запишется так:

$$499=4\cdot 100+1\cdot 50+1\cdot 25+ \\ +2\cdot 10+0\cdot 5+1\cdot 3+1\cdot 1.$$

Попробуем теперь обобщить сказанное, взяв в качестве последовательности ключевых чисел («базиса») любую последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$q_0=1<q_1<q_2<\ldots<q_n<\ldots \qquad (1)$$

Опишем, как получить запись произвольного числа N *в системе счисления с базисом (1)*.

В последовательности (1) ключевых чисел находим самое большое число q_n, не превосходящее N. Делим N на q_n и получаем (неполное) частное a_n и остаток r_{n-1}:

$$N=a_nq_n+r_{n-1}, \text{ где } 0\leqslant r_{n-1}<q_n.$$

Первый остаток r_{n-1} делим на следующее ключевое число q_{n-1}. Получаем

$$r_{n-1}=a_{n-1}q_{n-1}+r_{n-2},$$

где

$$0\leqslant r_{n-2}<q_{n-1},$$

или

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+r_{n-2}.$$

(Заметьте, что мы не исключаем здесь и тот случай, когда $r_{n-1}=0$,— в этом случае все последующие частные и остатки будут равны нулю!) Теперь новый остаток r_{n-2} делим на q_{n-2}, мы получаем

$$r_{n-2}=a_{n-2}q_{n-2}+r_{n-3},$$

где

$$0\leqslant r_{n-3}<q_{n-2},$$

или

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+a_{n-2}q_{n-2}+r_{n-3},$$

и т. д.

В конце концов, разделив предпоследний остаток r_1 на q_1, получаем

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ldots \\ \ldots+a_2q_2+a_1q_1+r_0,$$

где

$$0\leqslant r_0<q_1.$$

(Так как $q_0=1$, то делить на него «последний остаток» r_0 излишне: ясно, что $r_0=a_0q_0=a_0$.)

Практически подобное многократное деление обычно записывают слитно. Как это делается, мы покажем на уже разобранном примере записи суммы в 499 рублей в «системе кассира»:

$$\begin{array}{r|l} 499 & 100 \\ \hline 400 & 4 \\ 99 & 50 \\ \hline 50 & 1 \\ 49 & 25 \\ \hline 25 & 1 \\ 24 & 10 \\ \hline 20 & 2 \\ 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ \hline 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & \end{array}$$

т. е. $499=4\cdot 100+1\cdot 50+$
$+1\cdot 25+2\cdot 10+0\cdot 5+$
$+1\cdot 3+1\cdot 1.$

(Здесь все частные a_n, a_{n-1} и т. д. набраны красными цифрами, а само число N и остатки r_{n-1}, r_{n-2} и т. д.— синими.)

Позиционные системы счисления

Вероятно, вы уже догадались, что в случае базиса

$$q_0=1,\ q_1=10,\ q_2=10^2,\ \ldots,\ q_n=10^n,\ \ldots$$

мы будем иметь дело с общеупотребительной *десятичной* системой счисления. Но вместе того чтобы писать, скажем,

$$4\cdot 10^5+0\cdot 10^4+3\cdot 10^3+0\cdot 10^2+ \\ +1\cdot 10+7,$$

мы пишем просто 403017.

Рассеянный или чересчур пунктуальный кассир мог бы приготовить для записи своих выдач ведомость, где число выданных купюр разного достоинства заносилось бы в отдельные столбцы. В такой ведомости выдача 499 рублей выглядела бы так:

	100	50	25	10	5	3	1
499	4	1	1	2	0	1	1

Можно сказать, что в «системе счисления кассира» число 499 записывается в виде

4112011.

Системы счисления, родственные разобранным в последних двух примерах (т. е. десятичной системе счисления и «системе кассира»), называются *позиционными* (о значении этого выражения мы еще скажем ниже). Вместо громоздкой записи

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_2q_2+a_1q_1+a_0$$

в позиционной системе счисления с базисом (1) удобно пользоваться более компактной записью из $n+1$ «цифры»:

$$a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0.$$

При этом предполагается, что «цифры» a_k получены тем способом (алгоритмом), который был описан выше.

Из этого описания ясно, что в заданном базисе каждое натуральное число N записывается единственным образом. Далее, так как «старшая цифра» a_n получается как частное от деления на q_n числа N, которое по условию меньше q_{n+1} (ибо иначе мы начали бы с деления N на q_{n+1}, а не на q_n!), то $a_n<q_{n+1}/q_n$. Поэтому, если частное q_{n+1}/q_n заключено между целыми числами A и $A-1$:

$$A-1<\frac{q_{n+1}}{q_n}\leqslant A,$$

«цифра» a_n не превосходит $A-1$, т. е. она может принимать A значений:

$a_n=0$, или 1, или 2, ..., или $A-1$.

(Впрочем для «старшей» цифры числа значение $a_n=0$ также можно исключить.)

Аналогично цифра a_{n-1} получается в процессе деления «первого» остатка r_{n-1} на q_{n-1}. Но так как

$$r_{n-1}<q_n,$$

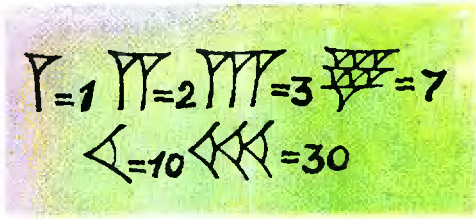
то

$$a_{n-1}<\frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

Это рассуждение можно распространить и на все другие цифры. В частности, так как последняя цифра a_0 просто совпадает с «последним» остатком r_0, полученным при делении на q_1, то a_0 может принимать q_1 значений:

$a_0=0$, или 1, или 2, ..., или q_1-1.

До позиционной системы счисления люди дошли не сразу. Одним из затруднений долго было отсутствие числа «нуль» (и специального знака для этого числа). Впервые знак нуля появился в рамках *вавилонской шестидесятеричной* системы счисления. В вавилонских текстах, написанных характерной «клинописью» (см. рисунок), числа от 1 до 59 записывались по *десятичной* системе.

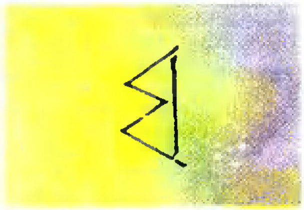


Но основной для вавилонской математики была шестидесятеричная система счисления с базисом

$$1,\ 60,\ 60^2,\ 60^3,\ \ldots,\ 60^n,\ \ldots$$

До мысли иметь специальный знак нуля математики, пользовавшиеся клинописью, дошли довольно поздно (впрочем, заведомо не позднее третьего века до нашей эры).

Знак нуля выглядел так:

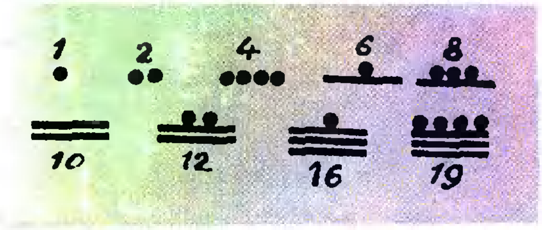


Вы поймете после этих разъяснений, что запись

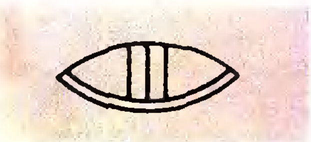
означает число

$$2593292=12\cdot 60^3+0\cdot 60^2+\\+21\cdot 60+32.$$

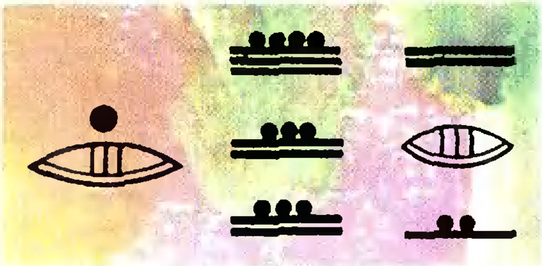
Очень близка к вавилонской система счисления, принятая в древней цивилизации индейцев майя, обитавших на территории Центральной Америки. Создание этой системы счисления относится к началу нашей эры. Если вавилонская система счисления имела комбинированный десятично-шестидесятеричный характер, то система майя была пятерично-двадцатеричной. Первые 19 чисел записывались комбинированием черточки, обозначавшей пятерку, и точки (единицы):



Но основную роль играла искаженная двадцатеричная система счисления. При записи числа «цифры» подписывались одна под другой, причем старшей являлась верхняя цифра. Прилагательное «искаженная» означает вот что: третье — после 1 и 20 — ключевое число в системе майя равнялось не $20\times 20=20^2$, а $18\cdot 20=360$; далее шли $18\cdot 20^2$, $18\cdot 20^3$, $18\cdot 20^4$. Существовало и специальное обозначение для нуля, напоминающее полузакрытый глаз:



Вот несколько примеров записи чисел в системе майя:



$(1\cdot 20+0=20,\quad 19\cdot 360+13\cdot 20+\\+13=7113,\ 10\cdot 360+7=3607).$

Основное отличие записи чисел в вавилонской системе счисления и в системе майя от римской нумерации как раз и заключается в «позиционном» принципе этих систем: в то время как у римлян буква I всегда означает единицу, а V — пятерку, независимо от того, где эти буквы стоят, у древних вавилонян и у индейцев майя значение «цифры» существенно зависит от занимаемого ею места, или «позиции». Именно поэтому такие системы записи чисел (к числу которых принадлежит и общераспространенная «десятичная система», созданная в Индии в VIII—IX вв. или немного раньше) называют *позиционными*.

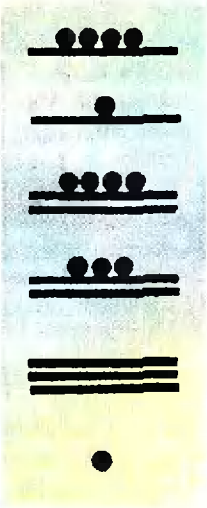
Упражнения

1. Запишите в «полной системе кассира» (где «ключевыми» являются следующие числа: 10 000, 5000, 2500, 1000, 500, 300, 100, 50, 20, 15, 10, 5, 3, 2 и 1, отвечающие выраженным в копейках ценностям всех существующих бумажных денег и всех монет) сумму в 233 руб. 87 коп. Запишите операцию перевода 23 387 коп. в «систему кассира» с помощью «непрерывного деления» (см. с. 16).

2. Прочтите записанное по вавилонской системе число

3. Прочтите записанное по системе майя

число



(Это самое большое число, обнаруженное в памятниках культуры майя.)

Системы счисления с заданным основанием

Так называются системы счисления с базисом

$$q_0=d^0=1,\ q_1=d^1=d,\ q_2=d^2,$$
$$q_3=d^3,\ q_4=d^4,\ldots \qquad (2)$$

где d — любое целое число, большее единицы. Это число называется *основанием* системы счисления.

К числу таких систем принадлежит обычная десятичная система счисления с основанием $d=10$, вавилонская шестидесятеричная ($d=60$) и получившая широкое применение в последнее время в связи с нуждами вычислительной техники двоичная система счисления ($d=2$). В случае произвольного основания d говорят о «d-ичной» системе счисления.

В d-ичной системе счисления запись

$$N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»$$

имеет следующий смысл:

$$N=a_nd^n+a_{n-1}d^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_2d^2+a_1d+a_0.$$

Ясно, что каждая цифра в записи числа по d-ичной системе счисления может принимать лишь d значений: 0, или 1, или 2, или 3, ..., или $d-1$. В частности, если $d=10$ и, следовательно, базис системы счисления имеет вид

$$q_0=1,\ q_1=10,\ q_2=100,\ q_3=1000,\ldots$$

мы приходим к общепринятой *десятичной* системе счисления (счет единицами, затем десятками, затем сотнями, тысячами, десятками тысяч и т. д.); в ней все цифры принимают значения, не превосходящие 9.

Самой простой из всех d-ичных систем счисления является, очевидно, *двоичная* система счисления с базисом

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=4,$$
$$q_3=8,\ q_4=16,\ldots$$

Эта система счисления знает всего две цифры 0 и 1. Вот запись первых 15 натуральных чисел в этой системе:

$1=1$	$6=110$	$11=1011$
$2=10$	$7=111$	$12=1100$
$3=11$	$8=1000$	$13=1101$
$4=100$	$9=1001$	$14=1110$
$5=101$	$10=1010$	$15=1111.$

При использовании этой системы счисления все расчеты становятся довольно длинными, но чрезвычайно простыми. Если бы мы всегда пользовались именно этой системой счисления, то школьникам пришлось бы запоминать лишь следующую «таблицу умножения»:

$$0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=1\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1$$

(и «таблицу сложения», сводящуюся к равенству $1+1=10$,— ведь число «10» — это обычная двойка!). Двоичная система счисления находит многочисленные применения в науке и технике; в частности, она лежит в основе устройства современных электронных счетных машин*).

Упражнения

4. Число $N=123\,456$, записанное в обычной (десятичной) системе счисления, перепишите:

а) в 7-ричной системе счисления;

б) в 12-ричной системе счисления (а этой системе счисления для записи чисел исполь-

*) Двоичной системе счисления и ее применению уделено много места в рассчитанной на учащихся средней школы книжке С. В. Фомина «Система счисления» (М., Наука, 1968), в ряде пунктов соприкасающейся с содержанием настоящей статьи.

зуются 12 цифр, например такие: 0, 1, 2, ..., 9, $x=10$, $y=11$);

в) в двоичной системе счисления.

5. Запишите в десятичной системе счисления числа, записанные в двоичной системе:

$$P=100\,100,\ Q=101\,010\,101.$$

6. Составьте таблицу сложения и таблицу умножения в троичной системе счисления.

Системы счисления с другими базисами

Системы счисления с базисами, не образующими геометрической прогрессии 1, d, d^2, d^3, ..., не имеют столь же широких применений. Но при решении некоторых математических задач они оказываются полезными.

Рассмотрим несколько примеров таких систем счисления.

1° **Система майя.** Выше мы уже говорили о системе счисления майя, базис которой имел вид

$$q_0=1,\ q_1=20,\ q_2=18q_1\,(=18\cdot 20),$$
$$q_3=20q_2\,(=18\cdot 20^2),$$
$$q_4=20q_3\,(=18\cdot 20^3),\ldots$$

Эта система счисления во всем подобна двадцатеричной, отличаясь от нее лишь в одном отношении: в ней вторая с конца цифра в записи $N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»$ произвольного числа (которую мы привычно располагаем горизонтально, а не сверху вниз, как майя)

$$a_1<\frac{q_2}{q_1}=\frac{18\cdot 20}{20}=18,$$

в то время как все другие цифры могут принимать 20 значений: 0, 1, 2, ..., 19.

Аналогично будет обстоять дело в системе счисления с базисом, в котором q_{n+1} делится на q_n без остатка для всех $n=0, 1, 2, \ldots$:

$$q_0=1,\ q_1=d_0,\ q_2=d_1q_1\,(=d_1d_0)$$
$$q_3=d_2q_2,\ q_4=d_3q_3,\ \ldots, \qquad (3)$$

где $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots$ — к а к и е у г о д н о целые положительные числа, большие 1, различные или одинаковые. В такой системе счисления в записи числа

$$N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»$$

первая с конца цифра a_0 может принимать d_0 значений 0, 1, 2, ..., d_0-1, следующая цифра a_1 может принимать d_1 значений от 0 до d_1-1, цифра a_2 может принимать значения от 0 до d_2-1 и т. д.

При этом в системе счисления с базисом (3), как и в d-ичной системе счисления (в которую наша система обращается в случае $d_0=d_1=d_2=\ldots=d$), имеет смысл л ю б а я запись

$$N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»,$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n — натуральные числа такие, что $a_0<d_0$, $a_1<d_1$, $a_2<d_2$ и т. д. В самом деле, легко проверить, что при обращении числа

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_2q_2+a_1q_1+a_0$$

в нашу систему счисления по методу «непрерывного деления» (см. выше с. 16) получаются цифры

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_1,\ a_0.$$

То, что такое благополучное положение не является общим законом, мы покажем на примере одной очень простой «системы счисления».

2° **«Четная» система счисления.** Примем за базис системы счисления все ч е т н ы е числа (и число $q_0=1$):

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=4,\ q_3=6,$$
$$q_4=8,\ q_5=10,\ q_6=12,\ \ldots$$

Так как здесь

$$\frac{q_1}{q_0}=q_1=2$$

и

$$\frac{q_{n+1}}{q_n}=\frac{2(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}<2$$

при всех $n>1$,

то эта система счисления, подобно двоичной, знает всего две «цифры»: 0 и 1. Условимся обозначать числа, записанные в этой «четной» системе счисления красным цветом. Тогда, очевидно,

$$2=10,\ 3=11,\ 4=100,\ 5=101,$$
$$6=1000,\ 7=1001,\ 8=10000,$$
$$9=10001 \text{ и т. д.}$$

И вообще, все числа изображаются либо единицей с тем или иным количеством нулей в конце (четные числа), либо двумя единицами в начале и в конце числа, разделенными известным числом нулей (нечетные числа).

Таким образом, в «четной» системе счисления запись каждого числа имеет вид

$$«a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»,$$

где каждая из цифр a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 может принимать только одно из двух значений: 0 или 1. Однако подавляющее большинство последовательностей нулей и единиц не выражает никаких чисел в «четной» системе счисления, поскольку в ней единица может стоять лишь на первом месте и — иногда — на последнем месте.

И наконец, еще один пример.

3° **«Система продавца».** Стандартный набор гирь для чашечных весов в магазине обычно включает гири:

10 г, 20 г (2), 50 г, 100 г, 200 г (2), 500 г, 1 кг, 2 кг, (2) и 5 кг.

Продавец пользуется набором гирь, как кассир ассигнациями, имеющимися в кассе. А именно, отвешивая товар, он прежде всего кладет на весы самую тяжелую из не перевешивающих товар гирь, далее он кладет старшую из оставшихся гирь и т. д. Так, например, взвешивая кусок мяса весом в 3 кг 460 г, он использует ряд гирь, показанных на рисунке.

Обобщая эту хорошо известную всем торговым служащим и всем хозяйкам систему «представлений чисел (весов) с помощью заданной системы гирь», мы приходим к системе счисления с базисом

$$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 20,\ 50,\ 100,\ 200,\ 500,$$

в которой 3 кг 460 г запишется так 11020101000.

В этой системе счисления в записи

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»$$

последняя цифра a_0 может равняться лишь 0 или 1 (ибо $q_1 = 2$); предпоследняя цифра a_1 может принимать значения 0, 1 или 2 (так как $2 < q_2/q_1 < 3$), третья от конца цифра a_2 снова может принимать лишь значения 0 и 1 (ибо $q_3/q_2 = 2$); цифра a_3 также может принимать лишь значения 0 и 1, а вот цифра a_4 снова может принимать значения 0, 1 и 2 (ибо $2 < q_5/q_4 < 3$). И вообще, в этой системе счисления все цифры

$$a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_{10},\ \ldots,\ a_{3k+1}$$

могут принимать значения 0, 1 и 2, а все остальные цифры — лишь значение 0 и 1. (Поэтому продавцу в магазине достаточно иметь две двухкилограммовые гири и только по одной гире в 1 кг и в 5 кг.)

Упражнения

7. Запишите числа X, Y и Z в десятичной системе, если

а) в «четной» системе счисления $X = 1\,000\,000\,001$;

б) в «системе продавца» $Y = 121\,121$;

в) в «системе продавца» $Z = 20\,120$.

8. Опишите всевозможные последовательности цифр

$$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1,\ a_0,$$

которые могут быть прочитаны как запись некоторого числа в «системе продавца».

9. В некоторой системе счисления с базисом (1) два числа записываются так: $N = 10\,211\,004$, $M = 10\,210\,437$. Можно ли по этим данным узнать, какое число больше?

10. Система гирь, о которой говорили в конце статьи, удобнее при взвешивании на чашечных весах, чем десятичная система, но не является самой экономной в смысле количества гирь. Чтобы убедиться в этом, решите следующие задачи:

а) Какое наименьшее число гирь необходимо, чтобы отвесить любое целое число килограммов от 1 до 30 на чашечных весах, если гири можно класть только на одну чашку весов? (Вы можете подбирать такие веса гирь, какие хотите.)

б) Тот же вопрос, если разрешается класть гири на обе чашки весов.

в) Какое наименьшее число гирь необходимо в том и другом случае, чтобы взвесить любой груз (в целое число граммов) от 1 г до 1000 г?

11. Докажите, что в троичной системе счисления (т. е. в системе с базисом (2), где $q=3$) любое число N можно представить в виде $N=A-B$, где A, B и $A+B$ записываются только нулями и единицами, причем такое представление для каждого числа единственно. Например:

$$2=10-1,\ 21=101-10,\ 1001=1001-0$$

(все числа записаны в троичной системе).

12. Докажите, что условие «q_{n+1} делится на q_n при всех $n=0, 1, 2, 3, \ldots$» является необходимым для того, чтобы в системе счисления с базисом (1) имела смысл любая запись

$$N=«a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0»,$$

где

$$a_0<\frac{q_1}{q_0},\ a_1<\frac{q_2}{q_1},\ a_2<\frac{q_3}{q_2} \text{ и т. д.}$$

13. Каким условиям должны удовлетворять числа базисной последовательности q_1, q_2, q_3, ..., чтобы в записи чисел встречались только две цифры 0 и 1? Какое еще условие на эти числа q_1, q_2, q_3, ... нужно наложить, чтобы при этом никакие две единицы не шли подряд?

14. Последовательность чисел

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=3,$$
$$q_3=5,\ q_4=8,\ q_5=13,\ \ldots,$$

где

$$q_{n+1}=q_n+q_{n-1},$$

называется последовательностью Фибоначчи. Докажите, что «Фибоначчиева» система счисления удовлетворяет всем условиям предыдущей задачи. Найдите в этой системе сумму чисел:

а) $\underbrace{100\ldots00}_{k}+\underbrace{100\ldots00}_{l}$;

б) $\underbrace{10101\ldots01}_{2m+1}+1$;

б) $\underbrace{10101\ldots01}_{2m+1}+\underbrace{100\ldots00}_{2m+1}$.

15. Можно ли разбить все натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... на две такие возрастающие последовательности a_1, a_2, a_3, ... и b_1, b_2, b_3, ..., что $b_k-a_k=k$ для любого $k=1, 2, 3, \ldots$?

После некоторых размышлений вы, конечно, догадаетесь, как выбрать такие последовательности (это можно сделать единственным образом)

a_1	b_1	a_2	a_3	b_2	a_4	b_3	a_5	a_6	b_4	a_7	a_8	b_5	a_9	b_6	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Но уловить закономерность в образовании пар (a_k, b_k) не так-то просто. Как узнать, например, к какой из двух последовательностей — a_k или b_k — относится 100, какому номеру оно соответствует, какое число будет с ним в паре (не выписывая все предыдущие a_k и b_k)?

Оказывается, чтобы сформулировать эту закономерность, нужно записать эти последовательности не в десятичной, а в фибоначчиевой системе счисления. Попробуйте ее обнаружить и доказать.

Нам пишут

Дружба — 91

В Польше, в городе Легница, с 10 по 15 июня 1991 года проходил Международный математический турнир школьников «Дружба — 91». В нем участвовали команды из нескольких городов Польши, а также команды из г. Стара Загора (Болгария), г. Алма-Ата (Казахстан) и г. Ереван (Армения).

Соревнования турнира проходили в два дня. Учащимся 9—10 классов предлагалось по 3 задачи в день, школьники 5—8 классов в первый день соревновались в личном первенстве, а во второй — в командном.

Победители соревнований были награждены дипломами, призами и медалями. Одну из золотых медалей получил Арзик Петросян из Еревана. Командное первенство выиграли школьники из г. Стара Загора. Соревнования прошли очень интересно. Для их участников были организованы увлекательные экскурсии по городам Польши.

Вот некоторые из задач, предлагавшихся на соревнованиях.

1. Решите в целых числах уравнения:

а) $\dfrac{m^2+n^2}{3}=1991$,

б) $\dfrac{m^2+n^2+1}{3}=1991$.

2. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Покажите, что если точка M — середина отрезка AB, а точка T — произвольная точка внутри отрезка BC, то окружности, вписанные в треугольники ATC, ATM и MTB, касаются одной прямой.

3. Докажите неравенство для любых действительных чисел a и b:

$$(a+b)^4\leqslant 8(a^4+b^4).$$

Азамат Сарсембаев и Алмас Рымов, ученики 11 класса РФМШ, г. Алма-Ата

Задачник „Кванта"

Задачи

M1316 — M1320, Ф1323 — Ф1327

M1316. Докажите, что арифметическая прогрессия из различных натуральных чисел, ни одно из которых не содержит в своей десятичной записи цифры c, состоит

а) при $c \neq 0$ не более чем из 72 чисел,

б) при $c = 0$ не более чем из 80 чисел.

Достигаются ли эти оценки?

С. Тарасов

M1317. Докажите для любого треугольника ABC неравенство

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leqslant \frac{8}{27},$$

где I — центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C — длины биссектрис треугольника ABC.

А. Скопенков

M1318. Дан связный граф с n ребрами. Докажите, что его ребра можно пометить числами от 1 до n так, что для каждой вершины, из которой выходит не менее двух ребер, числа стоящие на этих ребрах не имеют общего делителя большего 1. (Граф — это система точек, некоторые пары которых соединены ребрами. Граф называется связным, если по его ребрам можно из любой вершины пройти в любую другую.)

M1319. Дан треугольник ABC и точка M внутри него. Докажите, что хотя бы один из углов MAB, MBC, MCA меньше или равен 30 градусов.

M1320. Для произвольного заданного числа $\alpha > 1$ постройте бесконечную ограниченную последовательность $x_1, x_2, \ldots$ такую, что при любых m, n ($m \neq n$) выполняется неравенство

$$|\alpha_m - x_n||m - n|^\alpha \geqslant 1.$$

Ф1323. Тело немного сместили из положения неустойчивого равновесия, и оно поехало. При этом скорость удаления от начальной точки возрастает по закону $v(x) = A\sqrt{x}$, где x — расстояние до начальной точки, A — постоянный коэффициент. Через какое время тело окажется на расстоянии L?

З. Рафаилов

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 февраля 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1316» или «Ф1323». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1317 — M1320 предлагались в этом году на Международной математической олимпиаде.

Задачник „Кванта"

Ф1324. В кастрюлю-скороварку налили немного воды, закрыли герметично и поставили на огонь. К тому моменту, когда вся вода испарилась, температура кастрюли оказалась 115 °С, а давление внутри — 3 атмосферы. Какую часть объема вначале занимала вода? Начальная температура 20 °С.

А. Шеронов

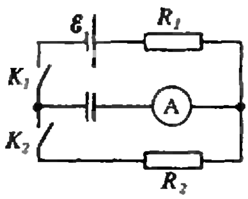


Рис. 1.

Ф1325. В схеме, изображенной на рисунке 1, ключи K_1 и K_2 в начальный момент разомкнуты. Через некоторое время после замыкания ключа K_1 ток через амперметр составляет $I=2$ мкА. В этот момент замыкают ключ K_2. Каким станет ток через амперметр сразу после этого? ЭДС батареи $\mathcal{E}=100$В, сопротивления резисторов $R_1=50$ МОм, $R_2=100$ МОм. Конденсатор, батарею, амперметр считайте идеальными.

В. Можаев

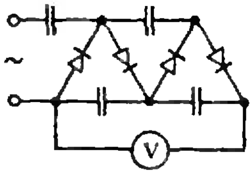


Рис. 2.

Ф1326. Радиолюбителям хорошо известна схема, приведенная на рисунке 2. Считая диоды и конденсаторы идеальными, определите показания высокоомного вольтметра при напряжении сети 220 В. Для чего может понадобиться такая схема?

А. Сашин

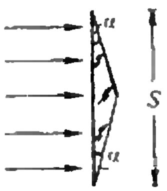


Рис. 3.

Ф1327. При нормальном падении света на бипризму Френеля (рис. 3) пучки света, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. На каком максимальном расстоянии от бипризмы еще будет наблюдаться интерференционная картина? Расстояние между вершинами бипризмы $S=4$ см, показатель преломления материала бипризмы $n=1{,}4$, преломляющий угол $\alpha=0{,}001$ рад.

В. Дерябкин

Решения задач

М1253, М1258, М1261, Ф1303 — Ф1307

В этом номере мы вернемся к задачам, пропущенным при публикации решений, в формулировках которых были необходимы поправки (за что мы еще раз приносим извинения читателям), и потому срок присылки решений продлевался.

М1253. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, разбитый на несколько выпуклых многоугольников — «карта» из нескольких «стран». (Каждые два многоугольника имеют или общую сторону, или общую вершину, или вообще не имеют общих точек.) Будем говорить, что

а) Докажем, что карта, показанная на рисунке 1, не реализуема в пространстве. (Эта карта — правильный треугольник ABC, разбитый на 7 треугольников симметричным образом, так что карта переходит в себя при повороте на 120°; здесь важно, что каждая из стран карты, кроме центральной, лежит в одной половине треугольника ABC.) Предположим, что соответствующая выпуклая шапочка существует (рисунок 2 — ее вид сверху, плоскость треугольника ABC горизонтальна). Поскольку точка K лежит ниже плоскости грани ALB, луч AK проходит ниже луча BL. Анало-

такая карта реализуема в пространстве, если она является проекцией «выпуклой шапочки», т. е. если существует выпуклый многогранник, у которого одна из граней — многоугольник M, а проекции остальных граней на плоскость грани M — страны этой карты (и, быть может, стороны многоугольника M).
а) Постройте пример карты из треугольников, не допускающей реализацию в пространстве.
Докажите, что карта допускает выпуклую реализацию в каждом из следующих случаев:
б) все страны — остроугольные треугольники,
в) каждая страна — вписанный многоугольник, содержащий внутри себя центр описанной окружности.

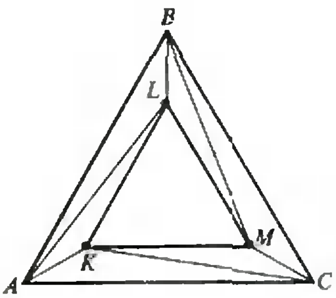


Рис. 1.

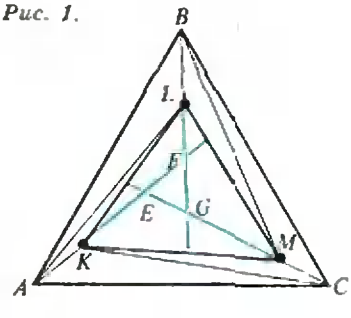


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

гично, луч BL проходит ниже луча CM, а луч CM — ниже луча CL — тем самым, двигаясь по отрезкам EF, FG, GE этих лучей, и переходя в точках E, F, G вниз с одного на другой, мы смогли бы пройти по замкнутому пути и при этом все время опускаться! — Противоречие. Перейдем теперь сразу к пункту в), очевидно, включающему б). Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат, в которой данная плоскость задается уравнением $z=0$.

Разместим вершины многогранной шапочки H, проекцией которой служит данная карта, на поверхности $z=h-x^2-y^2$ (она называется параболоидом вращения); h — достаточно большое число, выбранное так, что вся карта лежит внутри круга, по которому поверхность пересекает плоскость $z=0$.

Отметим для каждой вершины $(x;\ y)$ карты точку $(x;\ y;\ z)$ поверхности, в которую попадает перпендикуляр к плоскости Oxy, восставленный в этой вершине. Легко проверить, что все точки поверхности, соответствующие вершинам одной страны, лежат в одной плоскости. В самом деле, точки поверхности, проецирующиеся в точки окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

как видно из равенств

$$h-z=x^2+y^2=2ax+2by+r^2-a^2-b^2, \qquad (1)$$

лежат в плоскости

$$z=-2ax-2by+h-r^2+a^2+b^2 \qquad (2)$$

(соответствующая кривая на поверхности — эллипс).

Остается доказать выпуклость этой шапочки H. Можно сначала убедиться, что в условиях задачи в) грани шапочки H, соседние с данной, лежат ниже плоскости этой грани, и пользуясь этим доказать выпуклость H в целом...

Мы будем рассуждать несколько иначе. Заметим, что все точки $(x;\ y;\ z)$ поверхности параболоида, лежащие выше плоскости (2), проецируются в точки $(x;\ y)$ внутренности круга $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2$. Таким образом, достаточно доказать, что в круге, описанном около произвольной страны карты, нет других вершин карты — это будет означать, что все вершины шапочки H лежат не выше плоскости соответствующей грани.

резаемый некоторой стороной PQ страны (розовый сегмент на рисунке 3), покрывается описанным кругом C_1 соседней с ней (по стороне PQ) страны,— если только эта сторона не лежит на краю карты. В самом деле, дуга красного сегмента по условию меньше 180°, а голубая дуга круга C_1 — больше 180°. Таким образом, красный сегмент покрыт этой гранью, а ее вершины лежат на голубой дуге вне сегмента C — и быть может еще сегментами круга C_1 (примыкаю-

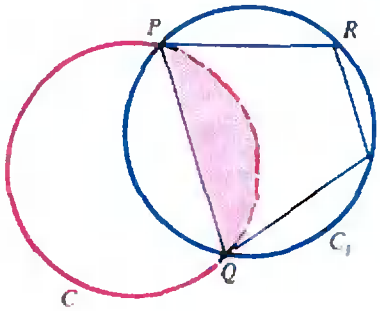


Рис. 3.

щими к точкам P и Q). К ним, в свою очередь, применимо то же рассуждение (на рисунке 3 нужно рассмотреть грань, лежащую по другую сторону от хорды PR и ее описанный круг C_2) — очевидно, в этом рассуждении участвуют лишь несколько граней с вершинами P и Q, так что оно закончится через несколько шагов. Таким образом, в описанном круге каждой страны карты нет других ее вершин.

С. Оревков

М1258. С $n>3$ числами, расставленными по окружности, разрешается проделывать следующую операцию: заменить тройку идущих подряд чисел x, y, z на тройку $x+y$, $-y$, $z+y$ (именно в таком порядке).

а) Можно ли с помощью таких операций получить из набора 20 чисел 1, 2, 3, ...9, 10, −1, −2, −3, ..., −9, −10 набор 10, 9, ..., 3, 2, 1, −10, −9, ..., −3, −2, −1?

б) Докажите, что для любого набора из n чисел на окружности, сумма которых положительна, можно получить один и только один набор из n неотрицательных чисел.

Будем считать, что числа $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ занумерованы по циклу:

$$a_{n+1}=a_1, \quad a_{n+2}=a_2, ...$$

Заметим, что указанное в условии преобразование при повторении (на том же месте) возвращает нас к исходной последовательности. Это наводит на мысль, что за ним скрыта какая-то перестановка двух чисел — мы увидим сейчас, что дело обстоит именно так.

Рассмотрим последовательность B частичных сумм:

$$b_1=c+a_1,$$
$$b_2=c+a_1+a_2,$$
$$b_3=c+a_1+a_2+a_3,$$
$$b_3=c+a_1+a_2+a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n=c+a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n,$$
$$b_{n+1}=c+a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n+a_{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и посмотрим, как эти числа изменятся при указанной замене. (Здесь c — произвольно выбранная константа, которая не играет роли: две последовательности, отличающиеся выбором c, мы не различаем — для нас важны лишь разности $b_k-b_{k-1}=a_k$.) Если $x=a_{k-1}$, $y=a_k$, $z=a_{k+1}$ меняются на $x+y$, $-y$, $z+y$, то $b_{k-2}=d$, $b_{k-1}=d+x$, $b_k=d+x+y$, $b_{k+1}=d+x+y+z$ (где d — некоторая константа) меняются на

$$d,\ d+x+y,\ d+x,\ d+x+y+z.$$

Мы видим, что при этом b_k и b_{k-1} просто меняются местами, а остальные b_i не изменяются. Рассмотрим два случая.

1) Сумма $a_1+a_2+...+a_n$ равна 0 (как в случае а)). Здесь числа b_k периодически повторяются: $b_{n+1}=b_1$, $b_{n+2}=b_2$ и, продолжая последовательность B частичных сумм, мы получим, что $b_{i+n}=b_i$ при любом целом i. Тем самым, мы можем считать, что числа b_k написаны по окружности и указанные в условии пре-

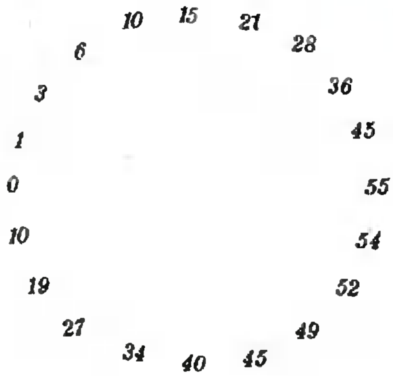


Рис. 1.

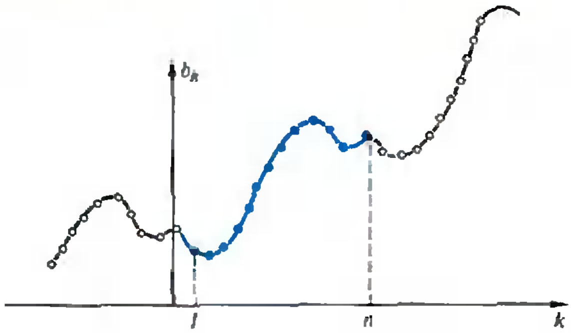


Рис. 2.

образования — просто перестановки двух соседних чисел b_k и b_{k+1}.

Легко проверить, что для расстановок, указанных в пункте а), наборы частичных сумм $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отличаются лишь порядком — и тот и другой состоит из 0 и сумм нескольких чисел подряд в последовательности 1, 2, ..., 10 (на рисунке 1, где они выписаны по кругу, каждое число должно поменяться местами с симметричным относительно горизонтального диаметра). Поскольку любая перестановка может быть очевидно осуществлена заменами соседних чисел, ответ в пункте а) положителен.

2) Сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n=s$ положительна. Теперь $b_{n+1}=c+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}=b_1+s$ — тем самым придется считать, что при обходе по циклу к частичной сумме b_i добавляется s: $b_{i+n}=b_i+s$ при любом целом i. Этим условием последовательность b_i, заданная при $1 \leqslant i \leqslant n$, определяется при всех целых i — положительных и отрицательных (типичный график такой последовательности $B=(b_i)$ изображен на рисунке 2). Удобно представить себе, что ось, на которой отмечаются значения индекса i, наматывается на окружность длины n; при этом каждой точке K окружности, $1 \leqslant k \leqslant n$, соответствует не одно число b_k, а целая прогрессия с нулевым членом b_k и разностью s.

Теперь при замене $x=a_{k-1}$, $y=a_k$, $z=a_{k+1}$ на $x+y$, $-y$, $z+y$, числа b_k и b_{k-1} по-прежнему просто меняются местами, причем мы считаем, что это происходит одновременно со всеми членами прогрессии — то есть для всех k, дающих тот же остаток при делении на n.

Докажем существование и единственность такого расположения b_k, при котором набор разностей $b_k-b_{k-1}=a_k$ будет неотрицательным — для чего необходимо и достаточно, чтобы последовательность $B=(b_k)$ стала неубывающей.

Сразу ясно, что результирующая последовательность определяется единственным образом: для каждого b_k можно указать место, куда оно должно в конце концов попасть — это место определяется количеством тех b_i, с которыми b_k должно поменяться местами, т. е. соотношением

(число сдвигов вправо) — (число сдвигов влево)=

=(число $b_i<b_k$ таких, что $i>k$) —

—(число $b_i>b_k$ таких, что $i<k$).

Укажем способ прийти к нужной монотонной последовательности B.

Будем переставлять такие пары b_k и b_{k-1}, в которых $b_k<b_{k-1}$ (пока это возможно). При этом общее «количество убываний»

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\text{число } b_i<b_k \text{ таких, что } i>k)+(\text{число } b_i>b_k \text{ таких, что } i<k).$$

на каждом шаге уменьшается. Это количество — целое неотрицательное число. Таким образом, через конечное число таких шагов последовательность B уже нельзя будет улучшить, так что последовательность B, получившаяся в результате, будет монотонной.

О. Ижболдин, Н. Васильев, Д. Фомин

М1261. На плоскости расположено 1991 красных, черных и желтых точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причем из каждой точки выходит одинаковое число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, которая соединена и с черной, и с желтой точкой.

Допустим, что каждая красная точка соединена только с желтыми, или только с черными. Перекрасим ее в первом случае в черный цвет, во втором — в желтый. После этого у нас останутся лишь точки двух цветов, причем из каждой выходит одно и то же число k отрезков к точкам противоположного цвета. Но тогда количество желтых и черных точек должно быть одинаковым (в k раз меньше числа отрезков), а их общее число 1991 нечетно. Получили противоречие.

С. Генкин

Ф1303. На горизонтальной поверхности льда нарисована окружность радиусом $R=10$ м. В центре окружности находится заяц, а волк, как вы, наверное, уже догадались,— на окружности. Заяц начинает двигаться по прямой с постоянной скоростью $v_0=2$ м/с, как показано на рисунке 1. Волк должен двигаться по окружности так, чтобы расстояние между ним и зайцем все время оставалось равным начальному. До

Пусть заяц в некоторый момент находится в точке A (рис. 2). Тогда волк должен быть в точке B — вершине равнобедренного треугольника OAB. Скорость волка $\vec{V}$ в каждый момент времени направлена по касательной к окружности. Так как смещение волка вдоль оси OX все время равно половине смещения зайца, проекция скорости волка на эту ось постоянна и равна $v_0/2$. Это означает, что вектор ускорения волка a не имеет составляющей по оси OX, т. е. направлен вдоль высоты треугольника OAB. Из простых геометрических соображений получаем

$$V\cos\alpha=v_0/2 \Rightarrow V=v_0/(2\cos\alpha),$$

$$a_n=V^2/R=a\cos\alpha, \Rightarrow$$

$$a=V^2/(R\cos\alpha)=v_0^2/(4R\cos^3\alpha)$$

какой точки окружности волк сможет добраться, не нарушая правил игры? Коэффициент трения о лед $\mu=0{,}05$. Волк двигается строго по окружности, не подпрыгивая.

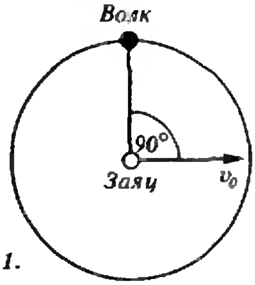


Рис. 1.

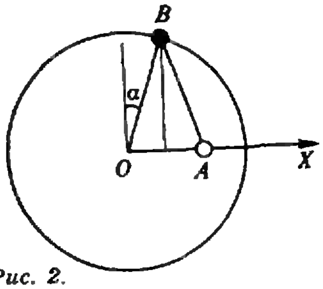


Рис. 2.

(здесь $a_ц$ — центростремительное ускорение волка). Но ускорение волка

$$a=\frac{F_{тр}}{M}\leqslant\frac{F_{тр\,max}}{M}=\frac{\mu Mg}{M}=\mu g.$$

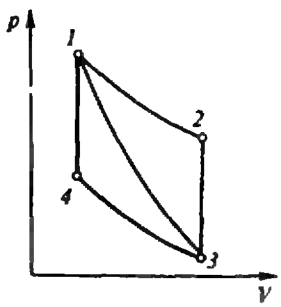
Значит, максимальный угол α_0 можно найти из равенства

$$\frac{v_0^2}{4R\cos^3\alpha}=\mu g\Rightarrow\cos\alpha_0=\sqrt[3]{\frac{v_0^2}{4R\mu g}}\approx0{,}59\Rightarrow\alpha_0\approx54°.$$

Примечание. В опубликованном условии этой задачи есть неточность: вместо слов «начинает двигаться» должно быть «двигается». Если заяц «начинает двигаться», то волк должен мгновенно набрать скорость $v_0/2$, а его ускорение ограничивается величиной $\mu g=0{,}5$ м/с^2. Участники олимпиады решали эту задачу в более корректном варианте.

А. Зильберман

Ф1304. *КПД тепловой машины в цикле 1—2—3—1 (см. рисунок), состоящем из изотермы 1—2, изохоры 2—3 и адиабаты 3—1, равен η_1. В цикле 1—3—4—1, состоящем из адиабаты 1—3, изотермы 3—4 и изохоры 4—1, КПД равен η_2. Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу 1—2—3—4—1? Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.*



В цикле 1—2—3—1 тепло потребляется на участке 1—2 и отдается на участке 2—3. Поэтому

$$\eta_1=\frac{Q_{12}-Q_{23}}{Q_{12}},$$

где Q_{23} — количество теплоты, отданное газом на участке 2—3.

В цикле 1—3—4—1 тепло потребляется на участке 4—1 и отдается на участке 3—4. Аналогично предыдущему равенству,

$$\eta_2=\frac{Q_{41}-Q_{34}}{Q_{41}}.$$

Легко видеть, что Q_{23} отдаваемое равно Q_{41} потребляемому — и в том, и в другом случае все количество теплоты соответствует изменению внутренней энергии, а перепады температур одинаковы: $T_2-T_3=T_1-T_4$. Итак,

$$Q_{23}=Q_{41}=Q.$$

Теперь можно записать выражение для КПД «большого» цикла:

$$\eta=\frac{A}{Q_{потр}}=\frac{A_{12}-A_{34}}{Q_{12}+Q_{41}}=\frac{Q_{12}-Q_{34}}{Q_{12}+Q_{41}}.$$

Количества теплоты Q_{12} и Q_{34} просто выражаются через Q:

$$Q_{12} = \frac{Q_{23}}{1-\eta_1} = \frac{Q}{1-\eta_1},$$

$$Q_{34} = Q_{41}(1-\eta_2) = Q(1-\eta_2).$$

Окончательно получаем

$$\eta = \frac{Q/(1-\eta_1) - Q(1-\eta_2)}{Q/(1-\eta_1)+Q} = \frac{\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2}{2-\eta_1}.$$

А. Шеронов

Ф1305. В схеме на рисунке 1 напряжение батарейки $U_0 = 10$ В, емкость конденсатора $C = 1$ мкФ, сопротивление гальванометра $R = 1$ кОм. Десять раз в секунду конденсатор отключают от цепи и сразу же подключают обратно, поменяв местами его выводы. Какой ток показывает гальванометр? Во сколько раз изменится ток при увеличении емкости конденсатора до 1000 мкФ? При такой частоте переключений стрелка гальванометра практически не дрожит.

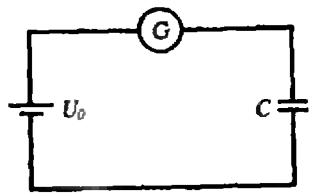


Рис. 1.

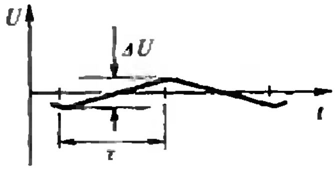


Рис. 2.

При заданных значениях R и C за время $\tau = 0{,}1$ с конденсатор каждый раз успевает практически полностью перезарядиться — его заряд в конце каждого интервала равен по модулю

$$q = CU_0.$$

Это значит, что за время τ по гальванометру протекает заряд

$$q_G = q - (-q) = 2q = 2CU_0,$$

и средний ток через гальванометр (именно его и показывает магнитоэлектрический прибор) оказывается равным

$$I_{ср} = \frac{q_G}{\tau} = \frac{2CU_0}{\tau} = 2\cdot 10^{-4}\,\text{А}.$$

При большой величине емкости конденсатора $C' = 1000$ мкФ процесс выглядит по-другому — за время τ напряжение U на конденсаторе изменяется, но только очень незначительно:

$$\Delta U \approx \frac{I\tau}{C'} = \frac{U_0\tau}{C'R} = 1\,\text{В} \ll U_0.$$

Ясно, что напряжение на конденсаторе колеблется около нуля и изменяется практически по линейному закону (рис. 2). Следовательно, средний ток в этом случае равен

$$I'_{ср} = I = \frac{U_0}{R} = 10^{-2}\,\text{А},$$

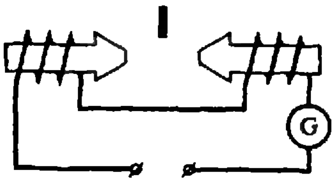
а отношение токов —

$$\frac{I'_{ср}}{I_{ср}} = \frac{10^{-2}\,\text{А}}{2\cdot 10^{-4}\,\text{А}} = 50.$$

З. Рафаилов

Задачник „Кванта"

***Ф1306.** Известны опыты, в которых диски, сделанные из немагнитных материалов, падают в неоднородном магнитном поле между полюсами электромагнита практически без ускорения (см. рисунок). В одном из опытов были исследованы четыре диска одинаковых размеров — из серебра, платины, цинка и неизвестного металла. Диск из серебра падал в зазоре электромагнита с некоторой постоянной скоростью v при токе в обмотке $I_1=0{,}41$ А. Диск из платины падал с той же скоростью при токе в обмотке $I_2=1{,}39$ А. При каком токе диск из цинка будет падать с той же скоростью? Из какого металла сделан четвертый диск, если он падал с той же скоростью при токе $I_3=0{,}29$ А? Считайте, что в данном диапазоне токов поле в зазоре электромагнита пропорционально величине тока. Необходимые данные о материалах возьмите из прилагаемой таблицы.*



Таблица

Материал	ρ, Ом · мм²/м при 20 °С	α, град⁻¹ при 20 °С	Плотность, г/см³	Температура плавления, °С
Алюминий	0,032	0,038	2,6—2,8	660
Бронза	0,12	0,004	7,4—8,8	1000
Вольфрам	0,055	0,0051	19,0	3387
Золото	0,024	0,0039	19,3	1063
Кобальт	0,097	0,0033	8,8	1490
Латунь	0,06—0,09	0,001—0,007	8,4—8,7	900
Медь	0,017	0,0043	8,6—9,0	1083
Молибден	0,048	0,0050	10,2	2622
Никель	0,11	0,0027	8,8	1452
Олово	0,11	0,0044	7,3	232
Платина	0,09	0,0038	21,4	1773
Свинец	0,21	0,0042	11,3	327
Серебро	0,016	0,0040	10,5	961
Сталь	0,199	0,0016—0,0042	7,5—7,9	1500
Хром	0,027	0,0042	6,7	1700
Цинк	0,060	0,0039	6,8—7,1	419

Тормозящая сила, приводящая к падению диска без ускорения, возникает при взаимодействии индукционных токов Фуко в диске с токами в обмотке электромагнита. При одинаковых размерах всех дисков можно считать, что эта сила

$$F \sim I_{инд} I_{обм} \sim \frac{\mathscr{E}_{инд}}{\rho} I_{обм}.$$

Пренебрегая искажениями полного поля за счет токов Фуко, для ЭДС индукции можно записать

$$\mathscr{E}_{инд} \sim \frac{\Delta B}{\Delta h} v \sim I_{обм} v,$$

где $\Delta B/\Delta h$ — скорость изменения индукции магнитного поля с высотой.

Итак,

$$F \sim \frac{I_{обм} v}{\rho} I_{обм} = \frac{I^2_{обм} v}{\rho}.$$

Для установившегося движения справедливо равенство

$$F - mg = 0.$$

Отсюда, введя плотность материала d, получаем соотношение

$$\frac{I^2_{обм} v}{\rho d} = \text{const}$$

(если для всех материалов использовать одинаковые единицы измерения одинаковых величин, то о размерностях можно не беспокоиться). Данные задачи позволяют проверить справедливость этого соотношения:

$$\text{для серебряного диска } \frac{I^2_{обм} v}{\rho d} = 1{,}006,$$

для платинового диска $\frac{I^2_{\text{обм}}v}{\rho d}=1{,}003,$

т. е. при точности данных из таблицы совпадение вполне удовлетворительное (напомним, что все диски двигаются с одинаковыми скоростями).

Таким образом, находим, что диск из цинка будет падать со скоростью v при токе в обмотке

$$I_{\text{обм}}=0{,}64-0{,}65\ \text{A}.$$

Опять же с помощью таблицы определяем, что четвертый диск сделан из алюминия — только для него значение выражения $I^2_{\text{обм}}/(\rho d)$ лежит в пределах 0,9—1,011.

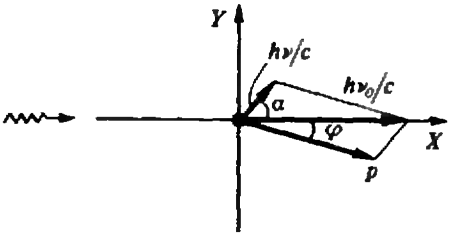
С. Козел

Ф1307. Квант электромагнитного излучения испытывает рассеяние на покоящемся электроне (так называемый Комптон-эффект). При этом рассеянный квант изменяет частоту, а электрон получает импульс отдачи p. Определите, под какими углами по отношению к направлению падающего излучения может двигаться электрон с данным импульсом. Считайте, что скорость электрона существенно меньше, чем скорость света.

Запишем для системы «квант — электрон» выражения закона сохранения энергии:

$$h\nu_0=h\nu+\frac{p^2}{2m}, \tag{1}$$

где ν_0 — частота кванта до рассеяния, ν — частота после рассеяния, m — масса электрона, и импульса, точнее — его проекций на оси координат X и Y (см. рисунок):



$$\frac{h\nu_0}{c}=\frac{h\nu}{c}\cos\alpha+p\cos\varphi, \tag{2}$$

$$0=\frac{h\nu}{c}\sin\alpha-p\sin\varphi, \tag{3}$$

где c — скорость света.

Исключим из уравнений (2) и (3) угол α. Для этого возведем их в квадрат:

$$\left(\frac{h\nu_0}{c}-p\cos\varphi\right)^2=\left(\frac{h\nu}{c}\cos\alpha\right)^2,$$

$$(p\sin\varphi)^2=\left(\frac{h\nu}{c}\sin\alpha\right)^2$$

и сложим:

$$(h\nu_0)^2 - 2pch\nu_0\cos\varphi + (pc)^2 = (h\nu)^2. \qquad (4)$$

Возведем левую и правую части уравнения (1) в квадрат:

$$(h\nu_0)^2 = (h\nu)^2 + 2h\nu\frac{p^2}{2m} + \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2. \qquad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) с учетом равенства $h\nu_0 = h\nu + p^2/(2m)$ получаем

$$h\nu = \frac{(p^2/(2m))^2 - 2pc(p^2/(2m))\cos\varphi + (pc)^2}{2(pc\cos\varphi - p^2/(2m))}.$$

Поскольку $h\nu$ всегда больше нуля, находим окончательно

$$pc\cos\varphi - \frac{p^2}{2m} > 0 \Rightarrow \cos\varphi > \frac{p}{2mc}.$$

Ю. Самарский

Логическая задача, с которой мы хотим вас познакомить, взята из книги Д. Бизама и Я. Герцега «Многоцветная логика» (М.: Мир, 1978).

Статью о логических задачах читайте в одном из первых номеров нашего журнала в 1992 году.

Странник в пустыне

Странник шел из Багдада в Бухару. За одним селением путь раздваивался: одна дорога вела в Бухару, а другая — в пустыню. По какой из дорог ему нужно идти, знали лишь местные жители. Но о них шла молва, что одни из них всегда говорят только правду, а другие — только ложь, причем и те и другие славятся своей неразговорчивостью и на все вопросы отвечают лишь «да» и «нет». И все-таки странник сумел узнать, какая из двух дорог ведет в Бухару. Для этого ему понадобилось задать лишь один вопрос первому встречному жителю селения.

Что это за вопрос?

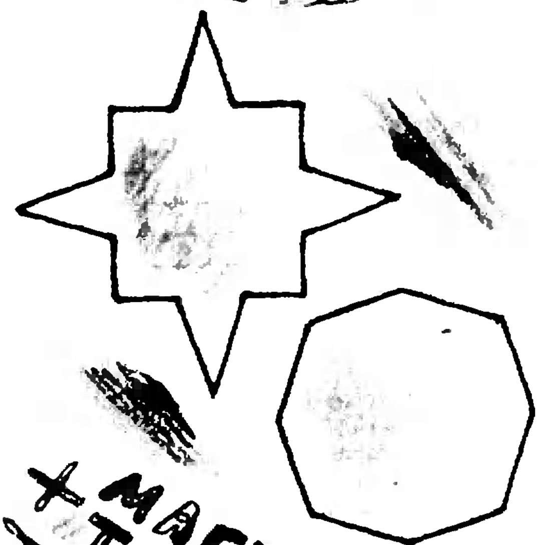
„Квант“ для младших школьников

Задачи

1. Акшин возвращался в кишлак из города с покупками для одноклассников. Он истратил ровно 500 рублей и купил при этом ровно 100 предметов: портфели, авторучки и микрокалькуляторы. Сколько было куплено авторучек, если авторучка стоит 1 рубль, портфель — 10 рублей, а микрокалькулятор — 50 рублей?

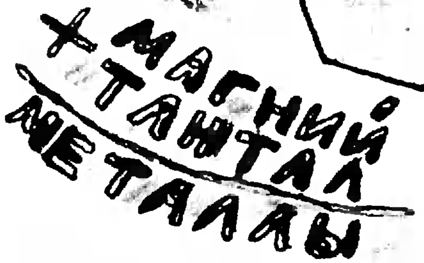
2. Расставьте числа в пустых клетках таблицы так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была одна и та же, а сумма всех чисел равнялась 200.

3. Соседка принесла для хозяйки и двух ее сыновей корзину яблок. Когда пришел из школы младший сын, он взял $^1/_3$ яблок, одно яблоко вернул в корзину для матери и пошел на занятия кружка. Потом вернулся из школы старший сын. Не зная о поступке брата, он также взял $^1/_3$ оставшихся яблок, а одно яблоко положил в корзину для матери и отправился на тренировку. Когда хозяйка вернулась домой с работы, то она не смогла разделить яблоки в корзине на три равные части, причем их было меньше десяти. Сколько яблок первоначально было в корзине?



4. Разрежьте одну из фигур на четыре равные части так, чтобы из них можно было сложить вторую фигуру.

5. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, разным — разные.



Эти задачи нам предложили ученик 11 класса из Баку А. Керимов, Н. Антонович, С. Ляшенко, восьмиклассник из Москвы С. Костин и С. Баженов.

ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА — ВЕННА

Кандидат педагогических наук
В. МАДЕР

Свой рассказ я начну с конкретной задачи.

Задача. В молодежном лагере в воскресенье должны были состояться соревнования по легкой атлетике. Накануне этого события неожиданно пришло письмо из другого лагеря:

«Здравствуйте, дорогие ребята! Мы хотим принять участие в ваших соревнованиях. Наша команда состоит из волейболистов, бегунов, прыгунов и метателей. Все бегуны являются прыгунами, а все прыгуны являются или метателями, или бегунами. Но среди тех метателей, которые являются еще и прыгунами, нет бегунов. Метателей у нас в два раза меньше, чем прыгунов, и на два меньше, чем бегунов. Бегуны составляют третью часть всей команды, а волейболистов в два раза больше, чем тех ребят, которые являются одновременно и прыгунами и метателями.

Мы приедем в субботу вечером. Приготовьте, пожалуйста, ночлег для всей нашей команды.— Ваши друзья.»

Известие о прибытии гостей было встречено с восторгом. Затруднение возникло только с их размещением на ночлег. Нужно было знать число ожидаемых гостей, но именно об этом в письме ничего не было сказано. Тем не менее выяснить это все же удалось. Сколько гостей должно было приехать?

Решение. Рассмотрим рисунок 1. В нем большой круг изображает множество всех гостей. Круги *Б*, *П*, *М* изображают соответственно множества бегунов, прыгунов и метателей. Нетрудно понять и смысл отдельных частей этих кругов. Так, например, общая часть двух кругов *Б* и *П* изображает множество тех ребят, которые являются и бегунами, и прыгунами. Среди гостей были еще и волейболисты, но (как следует из письма) ни один из волейболистов не был ни бегуном, ни прыгуном, ни метателем. Значит, вся область вне кругов *Б*, *П*, *М* приходится на долю волейболистов. Поэтому эта область обозначена буквой *В*.

Известно, что все бегуны были прыгунами. Это значит, что вся область *Б* должна находиться внутри *П*. Чтобы это условие было выполнено, надо заштриховать ту часть *Б*, которая выходит за пределы *П*,— отмечая этим, что заштрихованная часть является пустым множеством (что этой части нет).

Известно также, что все прыгуны являются или метателями, или бегунами. Значит, круг *П* целиком должен находиться внутри области, состоящей из *Б* и *М*. Поэтому ту часть *П*, которая выходит за пределы этой области, следует заштриховать.

Известно еще, что среди тех метателей, которые были еще и прыгунами, нет бегунов. Значит, из общей части кругов *М* и *П* надо исключить ту частичку, которая находится внутри *Б*,— ее тоже надо заштриховать.

В незаштрихованных ячейках запишем буквы x, y, z, t, которые будут обозначать число ребят, занимающихся соответствующими видами спорта.

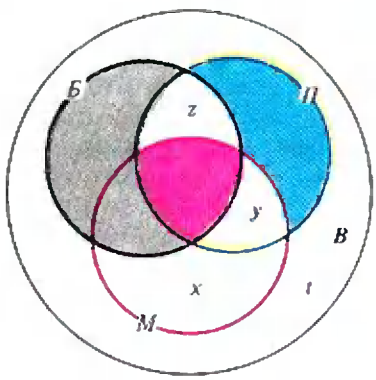


Рис. 1.

Число метателей в два раза меньше числа прыгунов. Значит, $2(x+y)=y+z$. Число метателей на два меньше числа бегунов. Значит, $x+y+2=z$. Бегуны составляют $^1/_3$ всей команды. Поэтому $3z=x+y+z+t$. Число волейболистов в два раза больше числа ребят, которые одновременно являются прыгунами и метателями. Значит, $t=2y$.

Получилась система четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Решив эту систему, найдем: $x=2$, $y=6$, $z=10$, $t=12$. Итак, число всех гостей равно $2+6+10+12=30$.

Ответ: на соревнования должна была приехать команда из 30 человек.

При решении приведенной задачи рисунок 1 играл существенную роль. В нем была удачно использована идея изображения множеств с помощью кругов. Эта идея полезна и при решении целого ряда других задач. Леонард Эйлер, например, широко пользовался такими рисунками, и в его честь этот метод был назван «методом кругов Эйлера». Этим методом математики пользовались и до Эйлера. Им пользовался, например, выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). В его черновых набросках были обнаружены рисунки с такими кругами. Но, как уже говорилось, достаточно основательно развил этот метод только швейцарский математик Леонард Эйлер (1707—1783). Он долгие годы работал в Петербургской Академии наук. К этому времени относятся его знаменитые «Письма к немецкой принцессе», написанные в период с 1761 по 1768 годы. В некоторых из этих писем Эйлер как раз и рассказывает о своем методе. После Эйлера этот же метод разрабатывал чешский математик Бернард Больцано (1781—1848), только, в отличие от Эйлера, он рисовал не круглые, а прямоугольные схемы. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнст Шрёдер (1841—1902) в книге «Алгебра логики». Но особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843—1923), подробно изложившего их в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. Поэтому такие схемы называют иногда «диаграммами Венна».

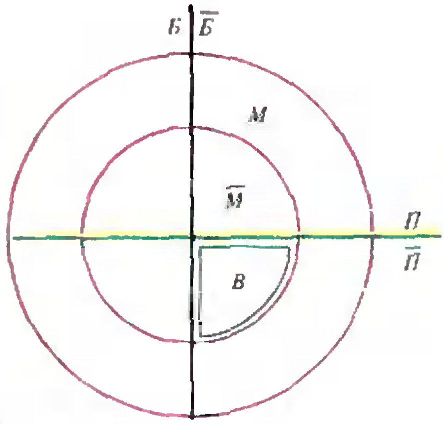


Рис. 2.

Диаграммы могут быть построены по-разному. Так, например, при решении рассмотренной задачи можно было бы вместо рисунка 1 проиллюстрировать условия этой же задачи с помощью рисунка 2. Здесь область $Б$ (расположенная слева от вертикальной черты) обозначает бегунов; а область $\bar{Б}$ (справа от вертикальной черты) обозначает множество небегунов. Точно так же, выше горизонтальной черты расположено множество $П$ прыгунов, а ниже черты — множество $\bar{П}$ непрыгунов. Маленький круг $\bar{М}$ обозначает множество неметателей, а кольцеобразная область $М$ обозначает метателей. Ячейка $В$ является пересечением (общей частью) множеств $\bar{Б}$, $\bar{П}$, $\bar{М}$. По условию известно, что те ребята, которые не были ни бегунами, ни прыгунами, ни метателями, были волейболистами. Именно поэтому эту ячейку мы и обозначили буквой $В$.

Упражнение. Попробуйте решить рассмотренную нами задачу с помощью рисунка 2.

Рассмотренная задача сводится к решению четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Но иногда встречаются и такие задачи, когда число уравнений меньше числа неизвестных. Получается неопределенная система уравнений, которая, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. Тем не менее, если учесть некоторые дополнительные условия, то оказывается, что и в этом случае задача может иметь одно единственное решение. Задачу такого типа мы сейчас и рассмотрим.

Задача. При школе был приусадебный участок с теплицей. В субботу группа ребят работала на этом участке. Они ремонтировали теплицу и поливали огурцы, помидоры и капусту. По окончании работы потребовались сведения о числе работавших, но мнения ребят разошлись и узнать ничего не удалось.

Было установлено только следующее. Ребята, ремонтировавшие теплицу, не занимались поливкой, а ребята, поливавшие овощи, не участвовали в ремонте теплицы. Никто из ребят не поливал одновременно огурцы и капусту. Некоторые ребята поливали помидоры и огурцы, некоторые поливали помидоры и капусту, но не было таких ребят, которые поливали бы только помидоры. Огурцы поливало 7 человек, а помидоры — 4. Число ребят, ремонтировавших теплицу, было на 2 меньше числа ребят, поливавших только огурцы. Удвоенное число ребят, поливавших только капусту, было на 1 больше утроенного числа тех ребят, которые поливали только огурцы.

Этих сведений оказалось достаточно, чтобы установить число работавших. Сколько же ребят было в субботу на приусадебном участке?

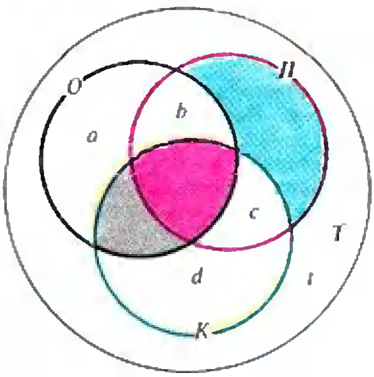


Рис. 3.

Решение. Нарисуем соответствующую диаграмму Эйлера — Венна (рис. 3). Круги *О*, *П*, *К* изображают множества ребят, поливавших соответственно огурцы, помидоры и капусту. Теплицу ремонтировали те и только те ребята, которые не были заняты на поливке овощей. Значит, область, расположенная вне кругов *О*, *П*, *К*, изображает множество ребят, ремонтировавших теплицу. Эта область обозначена буквой *Т*.

Никто из ребят не поливал одновременно огурцы и капусту. Поэтому общую часть кругов *О* и *К* надо заштриховать. Никто из ребят не поливал только помидоры. Значит, ту часть круга *П*, которая находится вне кругов *О* и *К*, тоже нужно заштриховать. Численные значения незаштрихованных ячеек обозначим буквами a, b, c, d, t. Буква a, например, обозначает число ребят, поливавших только огурцы; буква b обозначает число ребят, поливавших и огурцы, и помидоры. Смысл остальных букв тоже ясен из рисунка. Теперь, по известным данным, можно записать уравнения:

$$\begin{cases} a+b=7, \\ b+c=4, \\ a=t+2, \\ 2d=3a+1. \end{cases}$$

Получилась неопределенная система четырех уравнений с пятью неизвестными. Чтобы решить эту систему, примем a за параметр, которому мы сами можем приписать какое-нибудь конкретное значение. Тогда останется четыре неизвестных. Решив систему относительно этих неизвестных, мы получим следующие соотношения:

$$b=7-a,\ c=a-3,\ d=(3a+1)/2,$$
$$t=a-2.$$

Теперь, казалось бы, придав параметру a какое-нибудь произвольное значение, мы сможем вычислить и соответствующие значения неизвестных b, c, d, t. А так как выбор значения параметра a как будто совершенно произволен, то мы получим бесконечное множество решений. На самом же деле это не так. Дело в том, что неизвестные должны быть целыми неотрицательными числами. А это значит, что должны выполняться следующие дополнительные условия: $7-a\geqslant 0$, $a-3\geqslant 0$, $3a+1\geqslant 0$, $a-2\geqslant 0$, $(3a+1)/2$ — целое число. Последнее условие означает, что $3a+1$ должно быть четным числом, а это возможно только тогда, когда a — нечетное число.

Решив систему приведенных выше неравенств, получим

$$3\leqslant a\leqslant 7;\ a \text{ — нечетное число.}$$

Значит, для параметра a получилось три значения: 3, 5, 7. Но при $a=3$ получим $c=0$, а при $a=7$ получим $b=0$, что невозможно, так как c и b обозначают число ребят, поливавших кроме помидор еще капусту или огурцы, а по условию эти множества не могут быть пустыми. Следовательно, для параметра a остается одно-единственное значение $a=5$. Остальные неизвестные примут тогда следующие значения:

$$b=2,\ c=2,\ d=8,\ t=3.$$

Таким образом, общее число ребят, работавших на участке, равно

$$5+2+2+8+3=20.$$

Ответ: на участке в субботу работало 20 ребят.

Упражнение. Постройте для данной задачи диаграмму Эйлера — Венна, аналогичную той, которая изображена на рисунке 2.

А теперь попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

1. Мальчик рассказал своим друзьям, что бабушка прислала ему посылку с яблоками и грушами. Некоторые из этих плодов были большими, остальные — маленькими. По цвету плоды тоже различались: часто плодов была желтого цвета, остальные — зеленого. Среди плодов не было ни маленьких груш, ни маленьких зеленых яблок. Яблок было 25, а груш — 17. Больших плодов было 32. Желтых плодов было 28. Зеленых яблок было на 2 больше, чем зеленых груш. Самыми вкусными оказались большие желтые яблоки. Ребята заинтересовались: сколько же было таких яблок? Но мальчик им этого не сказал. И тогда они сами вычислили число этих яблок. Какой у них получился ответ?

2. Комплексная бригада строителей состояла из каменщиков, печников, штукатуров и разнорабочих (т. е. подсобных рабочих без квалификации). Все печники были каменщиками, а среди тех каменщиков, которые были еще и печниками, не было ни одного, который не был бы еще и штукатуром. Все каменщики, которые были еще и штукатурами, владели к тому же еще и специальностью печника. Были и такие штукатуры, которые никакими другими специальностями не владели. Кроме того, оказалось, что

1) рабочих, владевших только одной специальностью, было столько же, сколько было разнорабочих;

2) сумма удвоенного числа тех рабочих, которые были только штукатурами, и утроенного числа тех рабочих, которые были только каменщиками, равна 15;

3) число рабочих, владевших только специальностью каменщика, было в 5 раз меньше суммы числа 9 и утроенного числа тех рабочих, которые владели всеми тремя специальностями.

Сколько рабочих было в этой бригаде?

3. Каждый член туристической секции принял участие хотя бы в одном из запланированных походов, а таких походов было три: к озеру, к водопаду и в горы. Из ребят, побывавших у озера, никто не пошел в поход к водопаду. Поэтому к водопаду пошли только 8 человек. Все ребята, отправившиеся в горы, приняли участие по крайней мере еще в одном походе. Число ребят, побывавших и на озере, и в горах, в сумме с числом ребят, побывавших только на водопаде, было на 1 больше числа тех ребят, которые были только на озере. Сумма утроенного числа ребят, побывавших только на озере, и удовенного числа ребят, побывавших и на озере, и в горах, оказалась равной 19.

Сколько ребят было в этой туристической секции?

4. Две девочки — Лена и Валя — принесли по букету цветов из гвоздик и роз. Некоторые цветы были белые, остальные — ярко-красные. Среди цветов, принесенных Леной, не было белых роз, а среди цветов, принесенных Валей, не было красных роз. Ни Лена, ни Валя не принесли белых гвоздик. Кроме того, выяснилось следующее:

1) Валя принесла столько же цветов, сколько Лена;

2) сумма удвоенного числа всех белых роз и утроенного числа всех красных роз равна 18;

3) пятикратное число роз, принесенных Леной, было больше удвоенного числа красных гвоздик, принесенных ею же, ровно на 10.

Сколько и каких цветов принесла каждая из девочек?

5. Во время похода ребята устроили привал на берегу реки. Некоторые из них сразу же отправились в лес собирать грибы и ягоды. Остальные загорали на поляне, купались в реке или рыбачили. Все ребята, купавшиеся в реке, при этом и загорали на поляне, но среди загоравших были и такие, которые в воду не полезли. Рыбаки же устроились в тени и не загорали. Всего загорало 7 человек. Сумма удвоенного числа рыбаков и пятикратного числа тех ребят, которые загорали, но не купались, была равна 18. В лес ушло столько же ребят, сколько было рыбаков.

Сколько ребят участвовало в этом походе?

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в апреле будущего года. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 марта 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

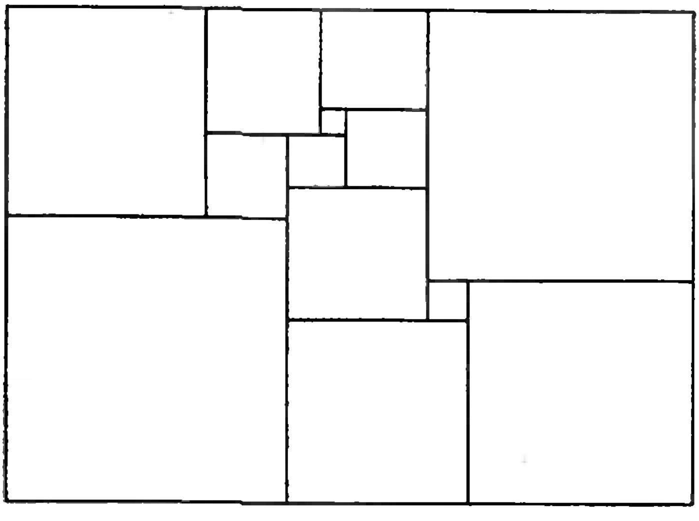
Задачи

10. 50 гангстеров стреляют одновременно. Каждый стреляет в ближайшего к нему гангстера (или в одного из ближайших, если несколько человек находятся на одинаковом расстоянии от него) и убивает его наповал. Найдите наименьшее возможное количество убитых. (Гангстеры — различные точки плоскости.)

Н. Васильев

11. Найдите наименьшие значения для сторон прямоугольника, если стороны всех квадратов, на которые он разбит, являются целыми числами.

С. Афтенюк



12. Замените буквы цифрами так, чтобы соотношение оказалось верным (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные):

ХРУСТ · ГРОХОТ=
=РРРРРРРРРР

В. Кибирев

Калейдоскоп „Кванта"

...во всех случаях, когда электрический ток получался с помощью магнитоэлектрической машины, количество теплоты, развиваемой током, находилось в постоянном отношении к силе, необходимой для вращения этой машины...

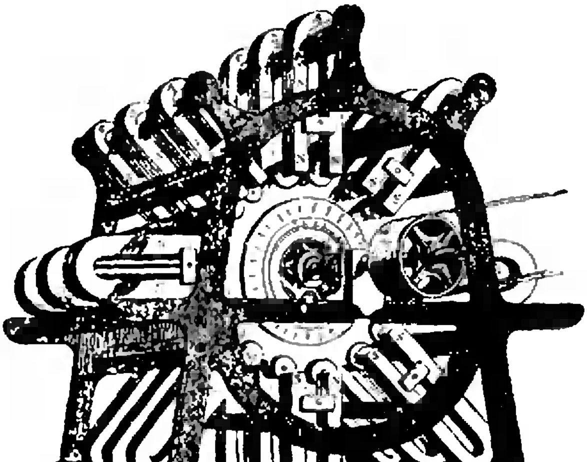
Дж. Джоуль

1. Нагревание проволоки гальваническим током пропорционально сопротивлению проволоки.
2. Нагревание проволоки гальваническим током пропорционально квадрату служащего для нагревания тока.

Э. Х. Ленц

А так ли хорошо знаком вам

закон Джоуля — Ленца?

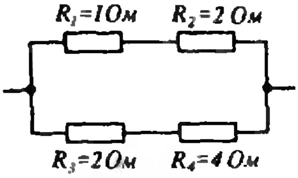


Этот закон о выделении тепла в проводнике при прохождении электрического тока — пример независимого открытия двумя учеными, открытия «с двойным гражданством», нередкого в истории науки. Побуждало же ученых стремление найти связи и количественные соотношения между «силами различной природы, приводящими к выделению тепла. И хотя закон Джоуля — Ленца не носит столь обобщающего характера, как фундаментальный закон сохранения энергии, сфера его применения не уменьшается до сих пор. Без него не обойтись при расчете электрических цепей и электронных схем, проектировании и эксплуатации осветительных и электронагревательных приборов. Предоставляем вам возможность убедиться в этом самим в очередном выпуске «Калейдоскопа».

Вопросы и задачи

1. В цепь включены параллельно медная и железная проволоки равной длины и сечения. В какой из них выделится большее количество теплоты за одно и то же время?

2. Две электрические лампы мощностью 25 и 200 Вт включены последовательно в электрическую цепь. Какая из ламп будет гореть ярче?



3. В каком из резисторов, показанных на схеме, выделяется наибольшее количество теплоты?

4. Почему электрические лампы чаще перегорают в момент замыкания цепи и очень редко — в момент размыкания?

5. Как изменится теплоотдача электроплитки, если укоротить ее спираль?

6. Как переделать электроплитку, рассчитанную на напряжение 220В, на 110 В, при этом не меняя и не укорачивая спираль?

7. По стальной проволоке пропускают ток такой силы, что она слегка накаляется. Почему при охлаждении одной части проволоки (например, водой) другая ее часть накаляется сильнее? Напряжение на концах проволоки поддерживается неизменным.

8. Половину спирали от электроплитки растянули, и спираль включили в сеть. Будут ли отличаться показания вольтметра,

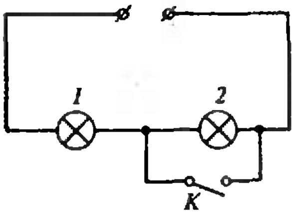
измеряющего напряжение на растянутой части спирали, от показаний на нерастянутой части?

9. Почему при включении в сеть электроутюга накал ламп в квартире сразу же заметно падает, но вскоре возрастает, достигая примерно прежнего уровня?

10. На что расходуется электроэнергия, потребляемая домашним холодильником?

11. Два потребителя подключаются к электрической батарее: один раз последовательно, другой — параллельно. В каком случае КПД будет больше?

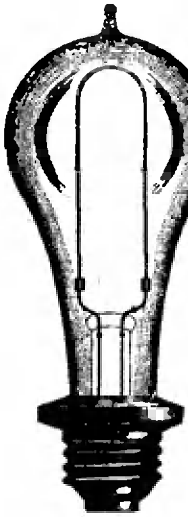
12. На схеме изображена цепь, состоящая из лампы *1* мощностью 40 Вт, ключа *K* и лампочки *2* от карманного фонаря. Цепь включили в городскую сеть при замкнутом ключе *K*, затем ключ разомкнули —



лампы горели нормально. Когда же в другой раз включение произошло при разомкнутом ключе, лампочка *2* сразу перегорела. Почему?

13. Для постепенного увеличения силы тока в электродвигателе при его пуске последовательно с ним включают кусок полупроводника. Почему именно полупроводника?

14. К середине проволоки, натянутой между двумя опорами, подвешивается груз. Отчего при подключении концов про-

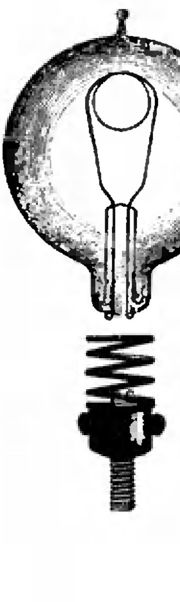


волоки к источнику напряжения груз начинает колебаться?

15. Как будет изменяться накал лампы, если в соленоид, подключенный последовательно с лампой к источнику постоянного тока, медленно вводить железный сердечник?

Микроопыт

Найдите сопротивление электрического утюга в рабочем режиме, если сведения о его мощности отсутствуют, с помощью электросчетчика и транзисторного радиоприемника.



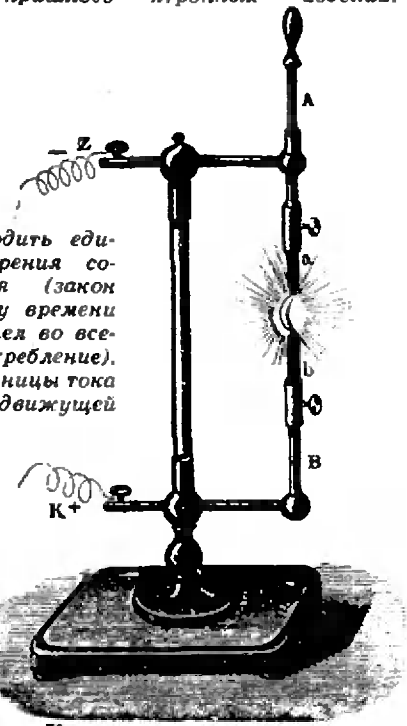
Любопытно, что...

...до открытия закона, принесшего ему мировую известность, Джоуль занимался определением эффективности электрических машин. «Я не сомневаюсь,— утверждал он,— что электромагнетизм в конце концов заменит собою пар для приведения в движение машин». Однако очень скоро он пришел к пессимистическому выводу о превосходстве паровых машин над электрическими.

...Ленцу, точность и обстоятельность опытов которого обеспечили признание нового закона, пришлось самому вводить единицу измерения сопротивления (закон Ома к тому времени еще не вошел во всеобщее употребление), а также единицы тока и электродвижущей силы.

...энергия, «расходуемая» всеми молниями за год, по оценке, сделанной на основе закона Джоуля — Ленца, более чем втрое превышает мировую годичную выработку электроэнергии.

...хотя токи в микросхемах очень слабые, при большой плотности деталей весьма ощутимым становится тепловыделение, резко снижающее качество электронных устройств: начинаются процессы диффузии, размываются границы между деталями, возрастает фоновый шум. Эти причины сильно мешают миниатюризации электронных изделий.



Что читать в «Кванте» о законе Джоуля — Ленца
(публикации последних лет)

1. «Вечная электрическая лампочка?» — 1989, № 8, с. 2;
2. «Мощность в цепи постоянного тока» — 1989, № 8, с. 67;
3. «Электрические машины постоянного тока» — 1990, № 1, с. 63;
4. «Калейдоскоп «Кванта» — 1990, № 12, с. 40.

[redacted]

Математика 9—11

Публикуемая ниже заметка предназначена десяти- и одиннадцатиклассникам, но будет полезна и учащимся девятых классов.

Два решения одной задачи

Довольно часто бывает, что при решении геометрических задач получаются два ответа (как правило, это связано с наличием двух корней у квадратного уравнения). Естественно возникает вопрос: оба ли решения удовлетворяют всем условиям задачи?

Проиллюстрируем сказанное совсем простым примером.

Задача 1. *Найдите сторону AB треугольника ABC, если $AC=6$, $BC=4$, $\angle BAC=30°$.*

Решение. Пусть $AB=x$. Записав теорему косинусов для треугольника ABC, получим после преобразований квадратное уравнение относительно x:

$$x^2-6\sqrt{3}\,x+20=0,$$

откуда $x=3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$.

При этом нас устраивают оба корня уравнения, так как в существовании двух треугольников, удовлетворяющих условию задачи, легко убедиться, выполнив соответствующее построение (рис. 1).

Следующая задача несколько сложнее.

Задача 2. *В треугольник с периметром 20 вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4. Найдите основание треугольника.*

Решение. Пусть EF — отрезок касательной к вписанной окружности, параллельный основанию AC треугольника ABC (рис. 2). Из подобия треугольников BAC и BEF следует, что их полупериметры p и p' относятся как соответствующие стороны, т. е.

$$\frac{p'}{p}=\frac{EF}{AC}. \qquad (*)$$

В то же время $p'=BG=p-AC$.

Пусть $AC=x$. Из равенства (*) получаем:

$$\frac{10-x}{10}=\frac{12}{5x} \qquad (**)$$

откуда $x=4$ и $x=6$.

Снова два ответа!

Здесь не удается объяснить появление двух ответов столь же просто, как мы сделали это, решая задачу 1. Поэтому попробуем применить другой метод.

Положим $EF=y$. Из соотношения (**) получаем:

$$y=\frac{1}{10}x(10-x).$$

В правой части этого равенства стоит квадратичная функция, график которой показан на рисунке 3. Эта функция принимает положительные значения при $x\in(0;\ 10)$, имеет максимум, равный 2,5, при $x=5$. Всякое значение из интервала (0; 2,5) функция принимает дважды — в точках, симметричных относительно точки $x=5$.

Мы видим, таким образом, что при $y=2{,}4$ существуют два значения x, дающие решение поставленной задачи.

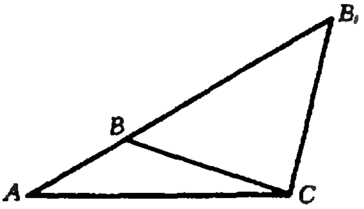


Рис. 1.

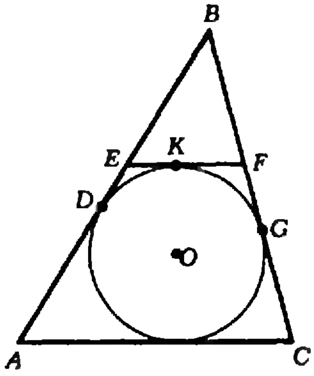


Рис. 2.

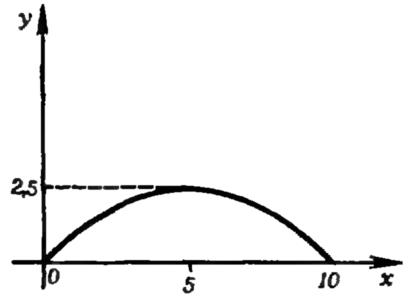


Рис. 3.

Кстати, это нехитрое исследование показывает, что при любом данном $y \in (0;\ 2{,}5)$ существуют два решения задачи, при $y=2{,}5$ — одно, а при $y>2{,}5$ — ни одного решения. Все это мы можем проделать и в общем виде, считая, что периметр треугольника равен $2p$, а отрезок EF равен a. В результате получим условия на a и p, при которых задача имеет два, одно или ни одного решения.

Упражнение 1. Проделайте это самостоятельно.

Рассмотрим еще один пример.

Задача 3. *Диагональ d равнобочной трапеции равна 10, а площадь $S=48$. Найдите высоту h этой трапеции.*

Решение. Проведем в нашей трапеции высоту BE. Пусть $AD=a$, $BC=b$ (рис. 4). Тогда $S=\frac{a+b}{2}h$, $BE=(a+b)/2$ (убедитесь в этом самостоятельно), и $d^2=h^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Обозначим $(a+b)/2$ через k. Выписанные ранее соотношения дают систему уравнений:

$$\begin{cases} hk=S, \\ h^2+k^2=d^2, \end{cases}$$

решая которую, получаем два значения h:

$$h_{1,2}=\sqrt{\frac{d^2\pm\sqrt{d^4-4S^2}}{2}}.$$

(В нашей задаче $h_1=6$, $h_2=8$.) При этом сразу усматривается необходимое условие разрешимости задачи: $d \geqslant \sqrt{2S}$.

Выразим теперь d^2 через h:

$$d^2=\frac{S^2}{h^2}+h^2.$$

Функция в правой части этого равенства возрастает при $h>\sqrt{S}$, убывает при $h<\sqrt{S}$ и достигает своего минимума, равного $2S$, при $h\angle\sqrt{S}$.

При этом каждое свое значение, большее $2S$, эта функция принимает дважды. Поэтому при $d>\sqrt{2S}$ существует две трапеции, удовлетворяющие условию, при $d=\sqrt{2S}$ — одна и при $d<\sqrt{2S}$ — ни одной.

Теперь рассмотрим две стереометрические задачи.

Задача 4. *Около шара описан конус. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости основа-*

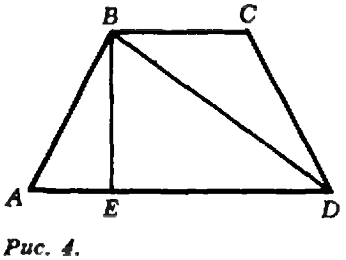


Рис. 4.

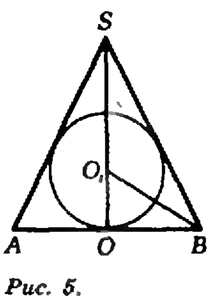


Рис. 5.

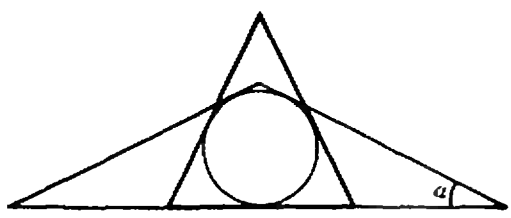


Рис. 6.

ния, если отношение объемов конуса и шара равно 3,6.

Решение. Осевым сечением рассматриваемой в задаче комбинации фигур является равнобедренный треугольник с вписанной в него окружностью (рис. 5), радиус которой равен радиусу шара.

Положив $OO_1=r$, $\angle SBA=\alpha$ $(0<\alpha<\pi/2)$, находим что $BO=r\operatorname{ctg}\alpha/2$, $SO=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$ и объем конуса $V_к=\frac{\pi r^3}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Записав отношение объемов конуса и шара, получим уравнение относительно α:

$$\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha=3{,}6.$$

Для его решения удобно выполнить подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, приводящую к уравнению

$$7{,}2t^4-7{,}2t^2+1=0,$$

откуда $t_1=\frac{\sqrt{6}}{6}$, $t_2=\frac{\sqrt{30}}{6}$. В итоге получаем два значения искомого угла: $\alpha_1=2\operatorname{arctg}\sqrt{6}/6$ и $\alpha_2=2\operatorname{arctg}\sqrt{30}/6$.

Теперь объясним, чем это вызвано. Сначала «на пальцах». Около шара можно описать бесконечное множество конусов. Если конус «узкий и очень высокий» или «очень широкий, но невысокий» (рис. 6), отношение объемов конуса и шара очень велико. Интуитивно ясно, что при некотором значении угла α это отношение минимально. Путь это минимальное значение равно k_0. Тогда при $k>k_0$ будут существовать два конуса — «узкий и высокий» и «широкий и невысокий», для которых отношение объемов будет равно k.

Теперь проведем точное исследование. Мы видели, что

$$k=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Вводя новую переменную $x=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, получим $k=\frac{1}{2x(1-x)}$ при $0<x<1$. В знаменателе — квадратичная функция от x. Поэтому функция k убывает от $+\infty$ до 2 при $0<x<1/2$ и неограниченно возрастает при $1/2<x<1$. Мы видим, что при $k>2$ существуют два значения x, при которых наша функция равна k. А это и значит, что при всяком $k>2$ (в частности, при $k=3{,}6$) существуют два конуса, удовлетворяющие условию.

Разумеется, разобранные задачи представляют простейшие случаи, которые могут возникнуть при решении геометрических задач, так сказать, «верхушку айсберга». Иногда при получении нескольких ответов приходится проводить гораздо более скрупулезное исследование, в ходе которого порой отбрасываются посторонние решения. Нам лишь хотелось показать, каким образом чисто геометрические задачи можно сводить к задачам об исследовании некоторых функций. В заключение предлагаем вам решить самостоятельно следующие задачи.

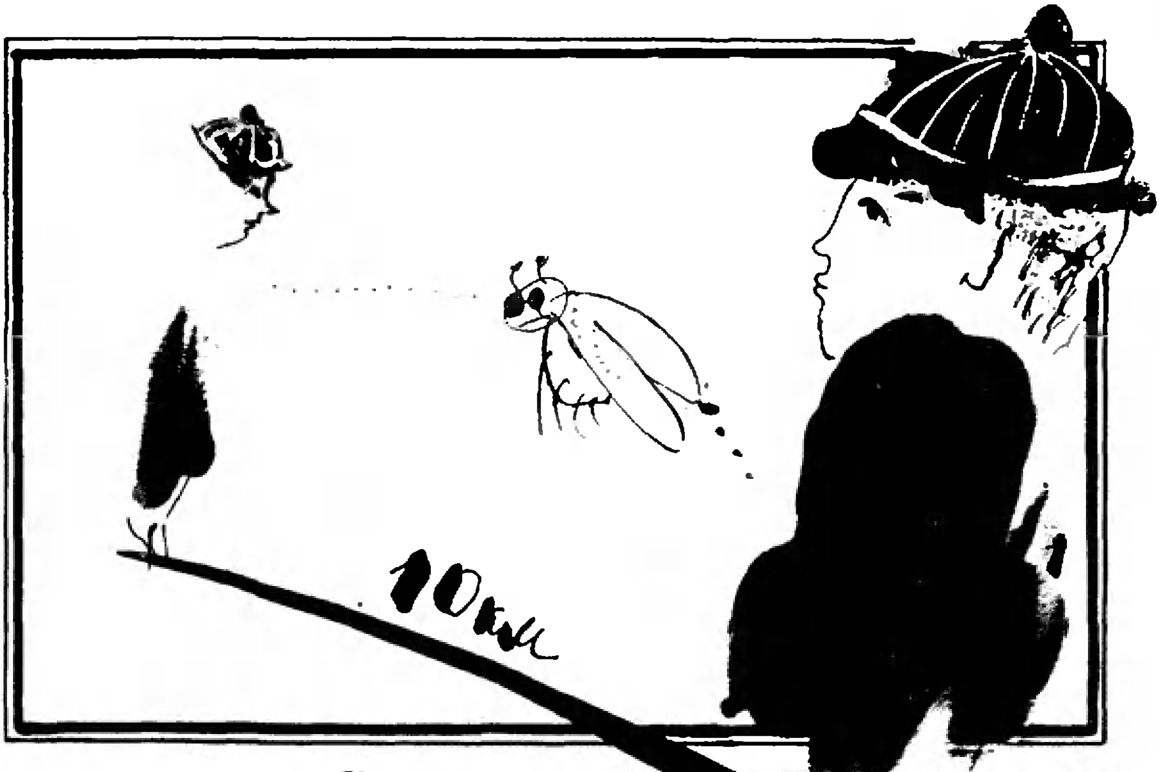
Упражнения

2. Через точку P диаметра окружности радиусом R проведена хорда AB, образующая с диаметром угол в 60°. Найдите BP, если $AP=a$ (рассмотрите все возможные случаи).

3. Отношение радиуса шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, к стороне основания равно 3/4. Найдите угол между боковой гранью и площадью основания.

4. Отношение радиуса шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, к стороне основания равно k. При каких значениях k задача имеет решение? Сколько будет решений в зависимости от k?

И. Габович



Практикум абитуриента

Как обмануть интеграл

Б. ГУРЕВИЧ, Р. МАЛКОВ

На олимпиадах, а иногда и на вступительных экзаменах по физике встречаются задачи, которые, казалось бы, невозможно решить, не выходя за рамки школьной математики. Но часто ключ к решению содержится в самой постановке задачи, а результат громоздких вычислений «спрятан» в исходных данных, что существенно упрощает ситуацию. Вот пример.

Задача 1. *По прямой дороге навстречу друг другу идут два туриста со скоростью 5 км/ч каждый. Когда расстояние между ними было 10 км, с плеча одного туриста взлетела муха и полетела вперед со скоростью 20 км/ч. Встретив второго, она повернула и полетела назад с той же скоростью. Так она летала между туристами до их встречи. Какой путь она пролетела?*

На первый взгляд, здесь надо последовательно складывать длины прямолинейных отрезков траектории мухи. Но задачу можно решить и не умея суммировать ряды, если заметить, что муха летала 1 ч (время до встречи туристов) со скоростью 20 км/ч, так что ее путь составляет 20 км.

Уже на примере этой простой и хорошо известной задачи видно, что не всегда необходимо детально описывать процесс. А теперь рассмотрим несколько более сложных задач.

Задача 2. *Лодку массой m, стоящую в спокойной воде, толкнули со скоростью v_0. Какой путь пройдет она до того, как остановится, если сила сопротивления движению пропорциональна скорости: $F=-\alpha v$?*

В любой момент движения ускорение лодки, согласно второму закону Ньютона, равно

$$a=-\frac{\alpha}{m}v,$$

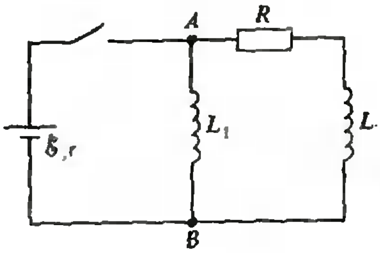


Рис. 1.

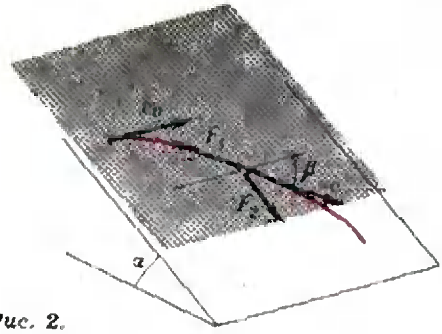


Рис. 2.

где v — скорость лодки в этот момент. Это пример движения с переменным ускорением (чем меньше скорость, тем медленнее она уменьшается), при котором в случае идеального выполнения условий задачи лодка будет двигаться бесконечно долго (хотя и очень медленно в конце). Из этого, правда, не следует, что тормозной путь будет бесконечным. Как же его найти?

Умножим обе части предыдущего уравнения на небольшой промежуток времени Δt, за который изменениями v и a можно пренебречь:

$$a\Delta t = -\frac{\alpha}{m} v\Delta t.$$

Теперь заметим, что $a\Delta t$ — это приращение скорости Δv за время Δt, а $v\Delta t$ — приращение пути Δl за это же время. Так как момент времени был выбран совершенно произвольно, можно сделать вывод, что для того, чтобы скорость изменилась на Δv, лодка должна пройти путь

$$\Delta l = -\frac{m}{\alpha}\Delta v$$

(минус в выражении объясняется тем, что Δv отрицательно). Из условия ясно, что за достаточно большое время скорость лодки уменьшается от начального значения v_0 практически до нуля. Тогда весь пройденный путь равен

$$l = \frac{m}{\alpha} v_0.$$

Абсолютно аналогично решается следующая — электрическая — задача.

З а д а ч а 3. *Какой заряд пройдет через резистор в схеме, изображенной на рисунке 1, после замыкания ключа, если до замыкания тока в катушках не было? Все параметры схемы известны.*

Пусть спустя некоторое время после замыкания ключа ток, текущий от точки A к точке B через катушку индуктивностью L_1, равен I_1, а через катушку индуктивностью L_2 — I_2. Тогда для любого момента времени, в соответствии с законом Ома, можно записать

$$L_1\Delta I_1 = L_2\Delta I_2 + RI_2\Delta t,$$

где ΔI_1 и ΔI_2 приращения токов, $I_2\Delta t$ — приращение искомого заряда q за малый промежуток времени Δt. Отсюда получаем

$$\Delta q = \frac{1}{R}(L_1\Delta I_1 - L_2\Delta I_2).$$

Сразу после замыкания ключа оба тока были равны нулю, а в установившемся режиме

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r},\ I_2 = 0.$$

В результате суммирования всех приращений заряда находим

$$q = \frac{L_1\mathcal{E}}{Rr}.$$

Более подробное обоснование корректности наших рассуждений будет проведено при решении следующей задачи.

З а д а ч а 4. *На наклонной плоскости с углом наклона α лежит шайба (рис. 2). Ей щелчком сообщают вдоль плоскости горизонтальную скорость v_0. Через какое время шайба остановится, если коэффициент трения о плоскость равен μ, причем $\mu > \mathrm{tg}\,\alpha$?*

Прежде всего, заметим, что с течением времени скорость шайбы меняется как по модулю, так и по направлению. В плоскости движения на шайбу действуют две силы: сила трения $\vec{F}_1$, направленная противоположно скорости и равная

$$F_1 = \mu mg \cos\alpha,$$

и составляющая $\vec{F}_2$ силы тяжести, перпендикулярная начальной скорости и равная

$$F_2 = mg \sin\alpha.$$

Пусть в некоторый момент времени скорость равна v и направлена под углом β к начальной. Из второго закона Ньютона следует, что за малый промежуток времени Δt скорость шайбы изменится на величину

$$\Delta v = \frac{1}{m}(-F_1 + F_2 \sin\beta)\,\Delta t. \qquad (*)$$

При этом изменение ее проекции на направление силы $\vec{F}_2$ будет равно

$$\Delta(v \sin\beta) = \frac{1}{m}(-F_1 \sin\beta + F_2)\,\Delta t. \qquad (**)$$

Два последних равенства (*) и (**) представляют собой довольно сложные дифференциальные уравнения, решив которые, можно в принципе получить искомое время движения шайбы. Но это далеко выходит за рамки школьной математики. Поэтому сделаем по-другому.

Заметим, что через определенное время как скорость v, так и ее проекция $v \sin\beta$ станут равными нулю. Это обстоятельство, очевидное из условия задачи, можно использовать для обхода сложностей решения уравнений. Математически оно выражается так:

$$\Sigma \Delta v = -v_0 \text{ и } \Sigma \Delta(v \sin\beta) = 0.$$

Здесь и далее знаком Σ будем обозначать сумму значений величины, стоящей под этим знаком, за все малые промежутки времени, на которые разбит процесс. В частности, искомое время движения шайбы до остановки равно

$$t = \Sigma \Delta t.$$

Разделим обе части уравнений (*) и (**) на F_2 и F_1 соответственно и сложим получившиеся равенства. Мы получим

$$\frac{1}{F_2}\Delta v + \frac{1}{F_1}\Delta(v \sin\beta) = \frac{1}{m}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{F_1}{F_2}\right)\Delta t,$$

или

$$\Delta t = m\left(\frac{F_1}{F_2^2 - F_1^2}\Delta v + \frac{F_2}{F_2^2 - F_1^2}\Delta(v \sin\beta)\right).$$

Подставив сюда значения для F_1 и F_2 и просуммировав обе части равенства, найдем искомое время:

$$t = \frac{v_0}{g}\,\frac{\mu \cos\alpha}{\mu^2 \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Теперь, наконец, можно сформулировать основную идею решения. Она состоит в том, что выводится уравнение, в левой части которого стоит мгновенное приращение искомой величины в произвольный момент процесса, а в правой — линейная комбинация приращений величин, начальные и конечные значения которых известны или выражаются через искомую величину. Суммирование всех значений правой и левой частей этого уравнения за все малые промежутки времени, на которые разбит процесс, и даст алгебраическое уравнение относительно искомой величины. Для удобства назовем этот способ методом выборки сумм. Особенность его заключается в том, что в некоторых случаях удобнее сводить исходную систему не к уравнению с одной переменной, а к уравнению со многими переменными, но подобранными определенным образом.

Возможности применения метода выборки сумм не всегда одинаковы. Так, в задачах 2 и 3 приращение искомой величины, выраженное через приращения величин с известными пределами изменений, получается непосредственно из исходной системы. В задаче 4 для выделения искомого приращения требуется ряд алгебраических преобразований. Но уже в следующей задаче одними алгебраическими преобразованиями не обойтись.

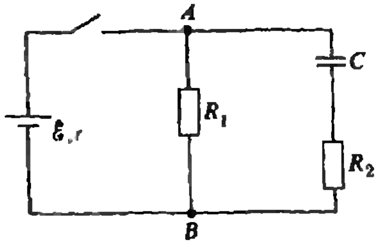


Рис. 3.

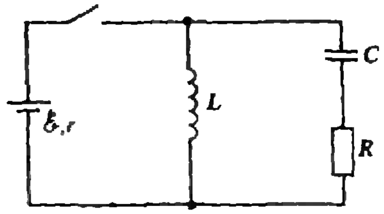


Рис. 4.

Задача 5. *В схеме, приведенной на рисунке 3, сначала ключ разомкнут и заряда на конденсаторе нет. Найдите количество теплоты, выделившееся на резисторе сопротивлением R_2 после замыкания ключа. Все параметры схемы известны.*

Пусть в некоторый момент времени после замыкания ключа от точки A к точке B через первый резистор течет ток I_1, через второй — I_2, а заряд конденсатора равен q. За малый промежуток времени Δt приращение искомой величины составит

$$\Delta Q = I_2^2 R_2 \Delta t,$$

а увеличение заряда конденсатора —

$$\Delta q = I_2 \Delta t.$$

Следовательно,

$$\Delta Q = I_2 R_2 \Delta q.$$

В последнем уравнении нет линейной комбинации приращений величин, начальные и конечные значения которых известны, так как коэффициент перед Δq — величина переменная. Но из условия задачи легко найти пределы изменения токов, поэтому попытаемся выразить ΔQ через их мгновенные приращения ΔI_1 и ΔI_2. Сделаем это с помощью закона Ома:

$$\mathcal{E} - r(I_1 + I_2) = R_1 I_1,$$

$$R_1 I_1 = \frac{q}{C} + R_2 I_2,$$

или

$$-r(\Delta I_1 + \Delta I_2) = R_1 \Delta I_1,$$

$$R_1 \Delta I_1 = \frac{\Delta q}{C} + R_2 \Delta I_2.$$

Выразив отсюда Δq через ΔI_2, получаем

$$\Delta Q = -\frac{R_2 C}{2}\left(R_2 + \frac{R_1 r}{R_1 + r}\right)\Delta (I_2^2).$$

Ток через второй резистор сразу после замыкания ключа равен

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 r + R_2 r + R_1 R_2},$$

а конечное его значение равно нулю. Поэтому суммирование выражения для ΔQ дает искомое количество теплоты:

$$Q = \frac{\mathcal{E}^2 R_1 R_2 C}{2(R_1 + r)(R_1 r + R_2 r + R_1 R_2)}.$$

Полученный результат может быть при желании обобщен для произвольного начального заряда конденсатора.

Как видно из приведенных выше примеров, предлагаемый метод в ряде случаев позволяет значительно упростить математические вычисления и исключить необходимость решения дифференциальных уравнений. Впрочем, авторы, сами в недавнем прошлом абитуриенты, искренне надеятся, что у членов приемных комиссий не хватит коварства включать подобные задачи в программу вступительных экзаменов. Но — кто знает?

Упражнения

1. В условиях задачи 4 найдите путь, пройденный шайбой.

2. В скрещенных однородных электростатическом (с напряженностью $\vec{E}$) и магнитном (с индукцией $\vec{B}$) полях ($\vec{E} \perp \vec{B}$) удерживается в покое частица с массой m и зарядом q. В некоторый момент времени частицу отпускают. Найдите расстояние между линией установившегося движения и начальным положением частицы, если на нее действует сила вязкого трения $\vec{F} = -\beta\vec{v}$.

3. В условиях задачи 3 найдите количество теплоты, выделившееся на резисторе после замыкания ключа.

4. В схеме, изображенной на рисунке 4, сначала ключ разомкнут, тока через катушку нет и конденсатор не заряжен. Какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа? Все параметры схемы известны.

Решу задачу. Возможны варианты

Б. КОРСУНСКИЙ

Как известно, среди физических задач есть такие, которые имеют не единственный ответ. Иногда их легко узнать в лицо по условию, в котором встречаются фразы типа «В каких случаях...?», «Рассмотрите оба варианта» и т. п. Но подчас и невинная с виду задача может содержать подвох, связанный с неоднозначностью решения. Часто, узнав правильный ответ, школьник после недолгих раздумий находит свою ошибку. А если ответ узнать негде? Если это контрольная? Или, пуще того, экзамен в институт, где обычно экзаменаторы наводящих вопросов не задают?

Попробуем научиться узнавать в лицо те задачи, где «варианты» замаскированы. Рассмотрим несколько типичных примеров.

Задача 1. *Тело располагается на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ. Найдите ускорение тела.*

Здесь почти каждый способен довольно быстро (и в этом вам поможет рисунок 1) получить ответ, который учителя и абитуриенты давно знают наизусть:

$$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$

И все же... Давайте проверим ответ при таких, скажем, числах: $\alpha=30°$, $\mu=0{,}8$. Получается, что тело само собой едет... вверх! Где же ошибка?

Перечитаем условие. Оказывается, тело *располагается* на наклонной плоскости, а не скользит по ней. Так откуда же следует, что $a\neq 0$? После этой подсказки уточнить решение несложно: надо вначале найти соотношение между μ и α, при котором тело начнет двигаться. Легко убедиться, что оно выглядит так:

$$\mu\leqslant \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда правильный ответ будет такой:

$$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha),\ \text{если}\ \mu\leqslant\operatorname{tg}\alpha,$$

$$a=0,\ \text{если}\ \mu>\operatorname{tg}\alpha.$$

Мораль. Будьте внимательны с силой трения. Помните, что соотношение $F_{тр}=\mu N$ заведомо верно только для случая скольжения, ну а если тело покоится, это, вообще говоря, не так. Поэтому любая задача с участием сил трения, если в ее условии отсутствуют прямые указания на характер движения тела, требует предварительного — пусть *небольшого* — *исследования*. Провести его совсем нетрудно. Напишите: «Предположим, что тело движется...» и честно проверьте это предположение. Дальше уже ошибиться практически невозможно.

Задача 2. *В откачанном кубическом сосуде с ребром $l=0{,}2$ м находится $m=36$ г воды при нормальных условиях. Каким будет давление в сосуде, если его нагреть до температуры $T=373$ К? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).*

Заметим, что последняя фраза часто сбивает с толку даже людей с довольно крепкими нервами, в результате чего быстро появляется следующее решение.

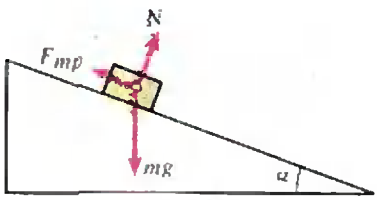


Рис. 1.

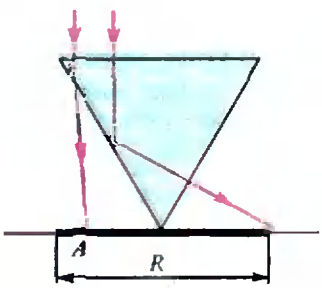


Рис. 2.

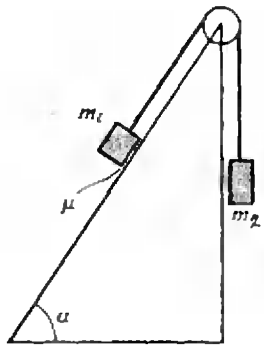


Рис. 3.

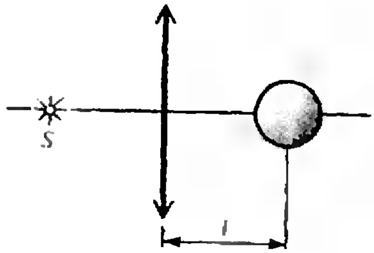


Рис. 4.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$, где $V = l^3$, получаем

$$p = \frac{m}{M}\frac{RT}{l^3} = 9\cdot10^6 \text{ Па}.$$

И следует столь же быстрый приговор: НЕВЕРНО!

Догадались, где ошибка? Ну конечно, испаряется не вся вода, а лишь столько, чтобы над оставшейся водой образовался насыщенный пар. И еще — температура 373 К, равная 100 °С, это та единственная температура, для которой давление насыщенного водяного пара надо помнить наизусть. При 373 К водяной пар не может создать давление, большее 10^5 Па. Именно такое давление и установится в сосуде. Разумеется, при этом испарится лишь небольшая часть воды.

Заметим, что эта задача может стать многовариантной, если сформулировать ее в общем виде, как и первую.

Таким образом, водяной пар, маскируясь под идеальный газ, тоже может «подставить ножку». Вот почему во всех задачах, связанных с испарением, конденсацией воды и другими фазовыми переходами, решение полезно начинать с фразы-выручалочки: «Предположим, что процесс прошел полностью» (какой процесс, ясно из условия задачи).

Задача 3. *На горизонтальной плоскости зачернен круг радиусом R. В центре круга стоит вертикально, опираясь вершиной на его центр, стеклянный конус с радиусом основания R, углом раствора 60° и показателем преломления n. На круг смотрят с большого расстояния вдоль оси конуса. Каков видимый радиус круга?*

Эта задача, как и некоторые другие задачи на геометрическую оптику, допускает варианты решения. Причина в том, что изображение любой точки создается бесконечным числом лучей, и поэтому характер изображения объекта конечных размеров существенно зависит от взаимного расположения крайних лучей.

Отличие этой задачи от предыдущих в том, что здесь присутствует опасность «потерять» один из двух одинаково естественных ответов. Чтобы их найти, воспользуемся принципом обращения лучей.

Пустим мысленно луч вертикально вниз у самого края основания конуса (рис. 2). Очевидно, луч после преломления на боковой поверхности будет отклоняться к центру круга, поэтому видимый радиус круга будет равен $R' = R$, и даже «с запасом» (точки, находящиеся дальше от центра, чем A, изображения не дают). Все бы хорошо, но мы забыли про полное внутреннее отражение. Действительно, если $n > 2/\sqrt{3}$, то крайний луч не пройдет сквозь боковую поверхность. Да и все остальные лучи тоже. Значит, круг будет виден в виде точки? Что-то не верится. И правильно — ведь луч может и отразиться от боковой поверхности, пройдя насквозь «со второй попытки». Причем «вторая попытка»

(Окончание см. на с. 53)

Игры и головоломки

Двенадцать долларов, ним и шоколадка

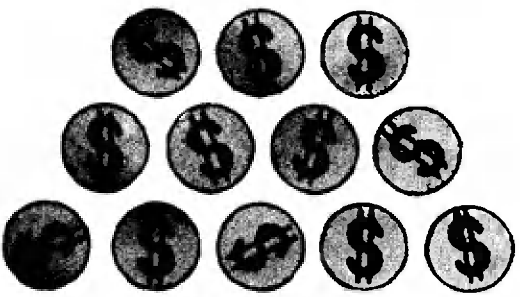
Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Не столь уж давно в салунах американского Среднего Запада можно было наблюдать любопытную игру. Начиналась она так. Бармен подзывал к себе подвыпившего ковбоя, выкладывал на стойку семь монет по одному доллару в две кучки — три и четыре доллара — и предлагал парню их выиграть: «Ставишь пять монет — получаешь двенадцать». Ковбой, отсчитав пять монет, клал их на стойку. Получалась третья кучка монет. Игра заключалась в том, что игроки по очереди берут монеты из этих кучек. Разрешается брать за один раз любое количество монет, но лишь из одной кучки. Забравший последнюю монету забирал и все остальные.

К стойке немедленно стекались завсегдатаи, наперебой подсказывавшие ковбою, из какой кучки и сколько монет, по их мнению, следует брать. Подобную картину вы можете наблюдать у нас при игре в три наперстка. Только если «наперсточники» — это шулера и их козырь — ловкость рук, то в игре «двенадцать долларов» выигрывает тот, кто лучше умеет считать.

Представим себе ход мыслей ковбоя, которому предстояло сделать первый ход: «Возьму-ка я целиком одну кучку. Останется две — играть будет полегче. А какую взять? Возьму маленькую, чтобы оставалось еще много монет».

Вот он берет кучку из трех монет. Остаются две кучки — в 4 и 5 монет. В ответ бармен берет одну монету из большей кучки. Получаются две одинаковые кучки монет. Ковбой берет монету из одной кучки — бармен одну из другой. Ковбой берет две монеты из одной кучки — бармен тоже две монеты из другой кучки. В кучках остается по одной монете. У ковбоя единственная возможность — взять одну монету. Другую — последнюю — берет бармен и высыпает в конторку все остальные монеты.



«Сыграем еще!» — разгорячившись, требует ковбой, выкладывая еще пять долларов.

«К вашим услугам», — отвечает бармен, снова выстраивая из своих семи долларов две кучки — в 3 и 4 доллара.

«Не торопись, подумай», — говорит ковбою его внутренний голос. «Хорошо, — отвечает ему ковбой, — в прошлый раз я проиграл, взяв маленькую кучку. А если я возьму другую? Не годится — бармен снова уравняет монеты в двух оставшихся кучках. Возьму-ка я одну монету из большой кучки. Нет! Бармен опять устроит две равные кучки, взяв маленькую кучку. А если взять две монеты? Тогда бармен возьмет среднюю кучку и снова будет две кучки с равным количеством монет. Возьму-ка я тогда из нее три монеты. Теперь он уже не сможет сделать свой финт!» Уверенным движением ковбой берет из большой кучки три монеты и с усмешкой смотрит на бармена.

Тот берет из средней кучки три монеты, и на стойке остаются кучки в 1, 2 и 3 монеты. И тут ковбой начинает понимать, что он проиграл, так как при любом его ходе бармен в ответ всегда сможет образовать две кучки с равным числом монет. Понурив голову, под смех окружающих ковбой возвращается на свое место. И невдомек парню, что еще тысячу лет назад китайские мудрецы научились играть в эту игру.

Кто же выигрывает: начинающий или его партнер? А как следует играть, чтобы выиграть? Оказывается, выигрывает тот, кто ходит первым. Для этого он должен взять из маленькой кучки две монеты. Любой другой ход проигрывает. Итак, образовалось три кучки — в 1, 4 и 5 монет. Теперь, как бы ни сыграл второй игрок, начинающий своим вторым ходом может либо образовать две кучки с равным количеством монет, либо образовать три кучки в 1, 2 и 3 монеты. А здесь второму игроку уже можно сдаваться.

Итак, мы научились играть в «ним» — так назвал эту игру профессор Гарвардского университета Чарлз Л. Бутон. Ну а если мы расположим в кучках не 3, 4 и 5 монет, а, скажем, 3, 4 и 6 монет, то кто выиграет на этот раз: начинающий или тот, кто делает ход вторым? Ведь мы уже получили, что если в кучках 1, 2 и 3 монеты или 1, 4 и 5 монет, то выигрывает тот, кто ходит вторым. А если мы увеличим число кучек? На все эти вопросы Ч. Бутон ответил в своей работе, появившейся на свет в 1901 году.

Оказалось, что здесь очень удобно записывать числа не в десятичной системе счисления, которой мы обычно пользуемся, а в двоичной, так полюбившейся за простоту создателям первых ЭВМ.

Напомним, что если в десятичной системе всякое натуральное число представляется в виде $N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_110^1+a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа от 0 до 9, то в двоичной системе счисления оно представляется в виде $N=b_m2^m+b_{m-1}2^{m-1}+\ldots+b_12^1+b_0$. Например, $1991=1\cdot10^3+9\cdot10^2+9\cdot10^1+1\cdot10^0=1\cdot2^{10}+1\cdot2^9+1\cdot2^8+1\cdot2^7+1\cdot2^6+0\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\times2^5=11111000111_2$. Индекс 2 указывает на то, что это число записано в двоичной системе счисления.

Поскольку иметь неограниченное количество однодолларовых монет довольно затруднительно, мы в дальнейшем будем оперировать вместо монет камешками. Ч. Бутон обнаружил удивительную закономерность: запишем друг под другом в столбик числа, выражающие количество камешков в каждой из кучек в двоичной системе счисления. Если в каждом разряде будет стоять четное число единиц (такой набор чисел мы будем называть правильным), то в этом случае при правильной игре выигрывает тот, кто ходит вторым. В противном случае выигрывает начинающий.

Убедиться в справедливости этого совсем нетрудно. Запишем несколько чисел в двоичной системе одно под другим, например,

$$\begin{array}{r}1010101\\111001\\11001\\101\end{array}$$

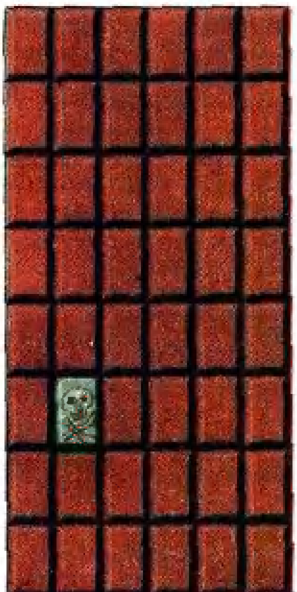
Попробуем приписать к ним еще одно число так, чтобы в каждом двоичном разряде сумма была четна, т. е. полученная система стала правильной. Как легко видеть, это можно сделать единственным образом: ставим в разряде этого числа 1, если там сумма была нечетна, и 0, если эта сумма четна. В данном случае следует приписать число 1110000. Поэтому, если у нас был правильный набор чисел, то при замене одного (ровно одного!) числа другим, набор перестанет быть правильным. Наоборот, если набор чисел не является правильным, то нетрудно заменить одно из чисел меньшим так, чтобы полученный набор уже был правильным.

Осталось заметить, что набор из нулей является правильным, а набор, не являющийся правильным, содержит хотя бы одно ненулевое число.

Подведем итоги. Если первоначальный набор чисел, указывающий состав кучки камней, является правильным, то выигрывает игрок, берущий камни вторым, а если этот набор не является правильным, то выигрывает начинающий. Первым и каждым последующим ходом он берет такое количество камней из одной кучки, чтобы оставался правильный набор. Так как количество камней все время убывает, а его партнер оставляет ему всегда хотя бы один камень, то начинающий выигрывает.

Игра «ним» неоднократно описывалась как в книгах по занимательной математике, так и в учебниках по программированию. Поэтому «на закуску» угостим вас «шоколадкой» — новой модификацией этой игры. Думаем, что ее с интересом встретят и те, кто уже давно знаком с игрой «ним».

Чтобы сыграть в эту игру, раздобудьте шоколадку (если это не удастся, то нарисуйте ее на листе бумаги, как это сделал наш художник) и отметьте одну из ее долек. Игра состоит в том, что двое игроков



по очереди разламывают ее по какой-нибудь прямой, делящей шоколадку на дольки, и съедают ту половинку, которая не содержит отмеченной дольки. (Если шоколадка нарисована, то соответствующую половинку заштриховывают.) Проигрывает тот, кто не сможет сделать хода, т. е. ему остается лишь одна отмеченная долька.

На первый взгляд связи между играми «ним» и «шоколадка» не видно. Присмотримся повнимательнее к шоколадке, изображенной на рисунке. Она состоит из $6\times8=48$ долек. Ее делят 5 вертикальных и 7 горизонтальных прямых, причем одна вертикальная прямая проходит левее отмеченной дольки, 4 — правее ее, 5 горизонтальных прямых проходят выше отмеченной дольки и 2 ниже.

Разложим теперь четыре кучки камней: в первой 1 камень, во второй — 4, в третьей — 5 и в четвертой — 2. Попросим игроков после каждого хода в игре с шоколадкой брать камни из кучек, причем если, скажем, отломили сверху полоску в 3 дольки, то берем из третьей кучки 3 камня, если отломили справа полоску в одну дольку, то берем из второй кучки 1 камень

и т. д. Заметим, что тогда, играя в «шоколадку», игроки будут играть и в «ним», при этом выигравший в «шоколадку» выигрывает и в «ним». Но в «ним» мы играть уже научились, и естественно нам поменять порядок ходов: сначала сделать ход в игре «ним», а потом соответствующим образом разломить шоколадку.

Итак, игра в «шоколадку» есть просто игра в «ним» на четырех кучках камней. И, как говорят, вопрос исчерпан.

Но вопросы тут же посыпались как из рога изобилия. Вот два наиболее интересных из них.

1. При каких размерах шоколадки начинающий проигрывает при любом расположении отмеченной дольки?

2. При каких размерах шоколадки начинающий выигрывает при любом расположении отмеченной дольки?

Решу задачу. Возможны варианты

(Начало см. на с. 49)

всегда будет удачной, так как угол падения равен нулю. Нетрудно видеть, что крайним лучом в этом случае будет тот, который попадет в край круга. При этом видимый радиус круга $R'=R/2$.

Окончательный ответ:

$$R'=R \text{ при } n<2/\sqrt{3},$$
$$R'=R/2 \text{ при } n>2/\sqrt{3}.$$

Итак, как вы заметили, во всех случаях для устранения недоразумений нам пришлось внимательно анализировать условия задач. Впрочем, это полезно всегда.

И в заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Найдите ускорение грузов в системе, изображенной на рисунке 3 (см. с. 50). Величины α, m_1, m_2 и коэффициент трения μ даны.

2. В идеальный термос поместили воду со льдом. Температуры воды и льда равны соответственно t_1 и t_2 ($t_2<0$), массы m_1 и m_2, удельные теплоемкости c_1 и c_2. Удельная теплота плавления льда λ. Найдите установившуюся температуру в термосе.

3. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шарика радиусом R, центр которого находится на главной оптической оси линзы на расстоянии l от нее (рис. 4 на с. 50). Найдите расстояние от линзы до точечного источника S, расположенного на оси линзы, при котором изображение источника совпадает с самим источником.

ДЕНЬ ЭКЗАМЕНА

(фантастический рассказ)

Г. СЛЕЗАР

В семье Джорданов никогда не заговаривали об экзамене до того самого дня, когда их сыну Дики исполнилось двенадцать лет. Именно в день его рождения миссис Джордан впервые упомянула об экзамене в присутствии сына, и ее тревожный тон вызвал раздражение отца семейства.

— Забудь об этом! — резко сказал он жене.— Дики выдержит этот экзамен.

Они сидели за завтраком, и мальчик с любопытством поднял голову от тарелки. Дики был подростком с настороженным взглядом, прямыми светлыми волосами и быстрыми нервными движениями. Он не разобрался, чем была вызвана неожиданная размолвка, но точно знал, что сегодня день его рождения, и ему прежде всего хотелось согласия в доме. Где-то там, в небольшом чулане, лежали перевязанные лентами пакеты с подарками, которые только того и ждали, чтобы их распаковали, а в крохотной кухне в подвешенной на стене печи с автоматическим управлением в этот момент готовилось что-то сладкое. Ему хотелось, чтобы день рождения был счастливым, а потому влага в глазах матери и хмурый отцовский взгляд не соответствовали настроению трепетного ожидания, с которым он приветствовал утро.

— О каком экзамене вы говорите? — спросил он.

Мать опустила глаза.

— Это просто проверка умственных способностей, которую правительство устраивает детям, достигшим двенадцатилетнего возраста. Тебе такая проверка предстоит на будущей неделе. Но из-за нее не следует беспокоиться.

— Ты хочешь сказать, что это вроде экзамена в школе?

— Что-то вроде этого,— подтвердил отец, вставая из-за стола.— Отправляйся лучше читать свои комиксы, Дики.

Мальчик медленно побрел в ту часть гостиной, которая еще с младенчества считалась «его» уголком. Он взял со стеллажа комикс, лежавший сверху, но, видимо, разноцветные залихватские картинки не увлекли его. Тогда он поплелся к окну и принялся уныло вглядываться в непроницаемую завесу тумана.

— Почему дождь идет именно сегодня? — спросил он.— Разве он не мог бы пойти завтра?

Отец, развалившийся в кресле, раздраженно зашелестел страницами правительственной газеты.

— Идет,— значит, нужно, вот и все. После дождя хорошо растет трава.

— Почему, отец?

— Потому что растет, вот и все.

Дики наморщил лоб.

— Между прочим, отчего она зеленая, трава?

— Никто не знает,— отрезал отец, но тут же пожалел о своей резкости.

После полудня они отмечали день рождения Дики. Сияющая мать вручила сыну пестрые свертки, и даже отец изобразил на лице улыбку и потрепал сына по голове. Дики поцеловал мать и с серьезным видом обменялся рукопожатием с отцом.

Потом был принесен торт с дюжиной свечей, и на этом празднество завершилось.

Час спустя Дики сидел у окна и наблюдал за тем, как лучи солнца безуспешно пытались пробиться сквозь облака.

— Отец,— спросил он,— до солнца далеко?

Рассказ перепечатывается из сборника «Последнее новшество» (М.: Профиздат, 1991).

— Пять тысяч миль,— отвечал отец.

За завтраком Дики снова заметил влагу в глазах матери. Он не ассоциировал ее слезы с предстоящим ему экзаменом, пока отец вдруг не заговорил на эту тему.

— Послушай, Дики,— начал он, как-то уж слишком сурово нахмурившись,— тебе сегодня предстоит одно дело.

— Знаю, папа. Надеюсь...

— В общем-то беспокоиться не о чем. Каждый день эту проверку проходят тысячи детей. Правительство хочет знать, какие у тебя способности, Дики. Только и всего.

— В школе я получаю хорошие отметки,— как-то неуверенно сказал Дики.

— Здесь — другое дело. Это особая проверка. Понимаешь, тебе дадут выпить жидкость, а потом ты пойдешь в комнату, где установлена специальная машина...

— А что это за жидкость? — спросил Дики.

— Да так, ерунда. На вкус вроде мятной лепешки. Они хотят быть уверенными, что ты говоришь правду. Не то чтобы правительство сомневалось в твоей честности, но прием жидкости гарантирует такую уверенность.

На лице Дики отразились замешательство и страх. Он взглянул на мать, но та успела изобразить на своем лице нечто отдаленно напоминающее улыбку.

— Все будет хорошо,— заверила она сына.

— Конечно! — подхватил отец.— Ты славный мальчик, Дики, проверку ты пройдешь. А потом мы вернемся домой и отпразднуем это событие. Хорошо?

— Да,— согласился Дики.

Они вступили в здание Правительственной Службы Просвещения за пятнадцать минут до назначенного часа. Ступая по мраморным плитам, пересекли огромный вестибюль с колоннами, миновали арку и вошли в автоматический лифт, который поднял их на четвертый этаж.

Там, напротив комнаты номер четыреста четыре, за полированным столом сидел молодой человек в мундире без знаков различия. В руках у него был блокнот со списком назначенных на этот час; молодой человек проверил Джорданов по списку на букву «Д» и после этого позволил им войти.

Комната номер четыреста четыре напоминала помещение суда: она была унылая, холодная и казенная, ряды металлических столов перемежались в ней рядами длинных скамей. Там уже ждали своей очереди несколько отцов с сыновьями; черноволосая женщина с тонкими губами раздавала анкеты.

Мистер Джордан заполнил анкету и вернул ее женщине. Потом сказал, обращаясь к Дики:

— Теперь уже недолго ждать. Когда тебя выкликнут по имени, ступай прямо в ту дверь, что в конце комнаты.

Без пяти минут одиннадцать выкликнули фамилию Джордан.

— Удачи тебе, сынок,— молвил отец, не глядя на Дики.— Я зайду за тобой, когда проверка закончится.

Дики подошел к двери и повернул круглую ручку. В комнате, где он очутился, был полумрак, так что мальчик едва мог различить лицо чиновника в сером мундире, который ответил на его приветствие.

— Садитесь,— ласково сказал чиновник. Он указал на высокий стул, находившийся рядом с его столом.— Тебя зовут Ричард Джордан?

— Да, сэр.

— Твой классификационный номер 600-115. Выпей вот это, Ричард.

Он взял со стола пластмассовый стакан и подал его мальчику. Жидкость в стакане была похожа на обезжиренное молоко и по вкусу лишь отдаленно напоминала обещанную мятную лепешку. Дики выпил содержимое до дна и вернул чиновнику пустой стакан.

Мальчиком овладела неодолимая сонливость; тем временем чиновник сосредоточенно писал что-то на листе бумаги. Затем он взглянул на часы и поднялся; лицо его оказалось на одном уровне с лицом Дики. Чиновник извлек из нагрудного кармана какой-то предмет, походивший на авторучку, и посветил в глаза мальчику.

— Прекрасно,— сказал он.— Идемка со мной, Ричард.

Он отвел Дики в угол комнаты, где напротив вычислительной машины стояло одно-единственное деревянное кресло с подлокотниками. На левом подлокотнике был укреплен микрофон, и, когда мальчик опустился в кресло, микрофон оказался как раз на уровне его рта.

— Теперь расслабься, Ричард. Тебе будут заданы разные вопросы, и ты хорошенько их обдумай. Потом отвечай в микрофон. Обо всем остальном позаботится машина.

— Хорошо, сэр.

— Теперь я оставлю тебя одного. Когда почувствуешь, что можешь начать, скажи в микрофон одно слово — готов.

— Слушаю, сэр.

Чиновник сжал его плечо и вышел. Дики произнес:

— Готов.

В машине загорелся свет, послышалось жужжание механизма. Затем голос произнес:

— Дополни предлагаемый ряд цифр: один, четыре, семь, десять.

Супруги Джордан сидели в гостиной, не произнося ни слова: они боялись строить какие-либо предположения.

Телефон зазвонил около четырех часов пополудни. Женщина потянулась за трубкой, однако муж ее оказался проворнее.

— Мистер Джордан?

Трубка искажала голос, тон говорившего был резким, официальным.

— Да, слушаю.

— Говорят из Правительственной Службы Просвещения. Ваш сын Ричард М. Джордан, классификационный номер 600-115, завершил прохождение правительственного экзамена. Мы вынуждены с прискорбием известить вас, что его интеллектуальное развитие превзошло установленный правительством уровень, предусмотренный статьей 84, раздел 5 «Нового кодекса»...

В противоположном углу комнаты послышался сдавленный крик женщины, которая еще ничего не знала, но обо всем догадалась по выражению лица своего мужа.

— Вы можете сообщить по телефону,— продолжал бубнить голос в трубке,— желаете ли вы, чтобы тело его было погребено правительством, или вы предпочитаете захоронить его в отдельной могиле. В случае если похоронами занимается правительство, их стоимость составляет десять долларов.

Перевод с английского
А. Мельникова

XXXII Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
А. ФОМИН

Основу эмблемы XXXII Международной математической олимпиады составляет государственный флаг Швеции и третье поколение кривой Кох, названной так в честь шведской женщины-математика, ее открывшей. Построение кривой Кох в данном случае начинается с равностороннего треугольника, который называется *затравкой*. Затравка — это нулевое поколение кривой Кох. Теперь каждую из его сторон разделим на три равные части и к каждому из средних отрезков приложим во внешнюю сторону по правильному треугольнику. Получится невыпуклый двенадцатиугольник — это первое поколение кривой Кох. С каждой его стороной поступим так же; получим второе поколение. Кривая, изображенная на эмблеме олимпиады,— это третье поколение кривой. Процесс этот может быть продолжен и дальше; «предельная» кривая называется *фрактальной кривой Кох*.

На олимпиаде, осененной этой красивой кривой, нашу страну представляли шестеро школьников: *Малинникова Евгения* (С.-Петербург, с. ш. 239), *Перлин Александр* (С.-Петербург, с. ш. 239), *Амбайнис Андрис* (Даугавпилс, с. ш. 12), *Темкин Михаил* (Москва, с. ш. 57), *Жуховицкий Всеволод* (С.-Петербург, с. ш. 239), *Некрашевич Владимир* (Киевская обл., с. Крутые Горбы). Все члены команды были хорошо подготовлены и находились в прекрасной спортивной форме: команда завоевала четыре золотые и две серебряные медали (см. таблицу) — прекрасный результат! Более того, команда в этом году установила своеобразный рекорд: набрала наибольшее (в процентном отношении) количество баллов за всю историю участия СССР в международных математических олимпиадах.

В неофициальном командном первенстве получились следующие результаты (каждая задача оценивалась в 7 баллов, в каждом из двух туров предлагалось по три задачи): СССР — 241, Китай — 231, Румыния — 225, Германия — 222, США — 212, Венгрия — 209, Болгария — 192, Вьетнам — 191, Япония — 180, Чехо-

Таблица

Участник	Задачи						Общее число очков	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Малинникова Евгения	7	7	7	7	7	7	42	золото
Перлин Александр	7	7	7	7	7	7	42	золото
Жуховицкий Всеволод	6	7	3	7	7	7	37	серебро
Темкин Михаил	7	7	7	7	7	7	42	золото
Некрашевич Владимир	6	7	3	7	6	7	36	серебро
Амбайнис Андрис	7	7	7	7	7	7	42	золото
	Итого:						241	

Словакия — 176, Франция — 175, Польша — 161, Югославия — 160, Канада — 154, Англия — 142, Швеция — 130 баллов и т. д.

Следующая, XXXIII, Международная математическая олимпиада состоится в июле 1992 года в Москве. Совсем непросто будет организовать и провести олимпиаду, в которой предстоит участвовать командам более чем из 60 стран. Поэтому мы обращаемся ко всем организациям и частным лицам, которые могли бы оказать помощь в этом благородном деле: мы будем рады получить ваши предложения! Присылайте их в редакцию с пометкой «ММО».

Задачи

1. (СССР) Дан треугольник ABC. Пусть A', B', C' — точки пересечения биссектрис углов CAB, ABC, BCA со сторонами BC, CA, AB соответственно и I — центр вписанной окружности. Докажите, что

$$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}.$$

2. (Румыния) Пусть n — целое число, $n>6$ и $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — это все натуральные числа, которые меньше n и взаимно просты с n. Докажите, что если

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_k-a_{k-1}>0,$$

то n — или простое число, или натуральная степень числа 2.

3. (Китай) Пусть $S=\{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что любое n-элементное подмножество множества S содержит 5 попарно взаимно простых чисел.

4. (США) Дан связный граф G с k ребрами. Докажите, что можно занумеровать ребра всеми числами $1, 2, \ldots, k$ так, что для каждой вершины графа, которая соединена ребрами не менее чем с двумя другими вершинами, набор чисел, которыми помечены эти ребра, не имеет общего делителя, большего 1.

(Граф G состоит из множества точек, называемых его *вершинами*, вместе с множеством *ребер*, соединяющих некоторые пары различных вершин. Каждая пара различных вершин u, v принадлежит не более чем одному ребру. Граф G называется *связным*, если для каждой пары вершин $\{x, y\}$ существует некоторая последовательность вершин $x=v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m=y$ такая, что каждые v_i, v_{i+1} $(0\leqslant i<m)$ соединены ребром G.)

5. (Франция) Пусть P — внутренняя точка треугольника ABC. Докажите, что хотя бы один из углов PAB, PBC, PCA не больше $30°$.

6. (Нидерланды) Бесконечная последовательность действительных чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$ называется ограниченной, если существует постоянная C такая, что $|x_i|\leqslant C$ для каждого $i\geqslant 0$.

Дано действительное число $a>1$. Постройте ограниченную бесконечную последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ такую, что неравенство

$$|x_i-x_j|\cdot|i-j|^a\geqslant 1$$

выполнено для каждой пары различных чисел i и j.

XXII Международная физическая олимпиада

А. ЗИЛЬБЕРМАН,
доктор физико-математических наук
С. КОЗЕЛ

В этом году международная олимпиада впервые проходила в столице республики Куба — Гаване. В ней приняли участие команды из 32 стран.

Команду нашей страны представляли:

Сергей Башинский — выпускник с. ш. 27 г. Стерлитамака,

Сергей Добровольский — выпускник с. ш. 13 г. Днепропетровска,

Александр Ляпин — выпускник с. ш. 9 г. Нальчика,

Винцас Тамошюнас — выпускник с. ш. 45 г. Вильнюса,

Тимур Шутенко — теперь одиннадцатиклассник с. ш. 41 г. Мариуполя.

Кандидатами в команду были еще двое — *Сергей Джосюк* из г. Винницы и *Игорь Полищук* из г. Москвы. Однако поехать на олимпиаду могли только пятеро. Окончательный отбор был проведен на специально устроенной олимпиаде, где требования были максимально приближены к требованиям МФО.

Как и в прошлые годы, задачи олимпиады были составлены хозяевами олимпиады и обсуждены Международной комиссией, состоящей из представителей стран-участниц.

Приведем условия задач теоретического тура.

Задача 1

На рисунке 1 показан однородный шар радиусом R. Вначале центр масс шара находился в состоянии покоя, а сам шар вращался вокруг горизонтальной оси, проходящей че-

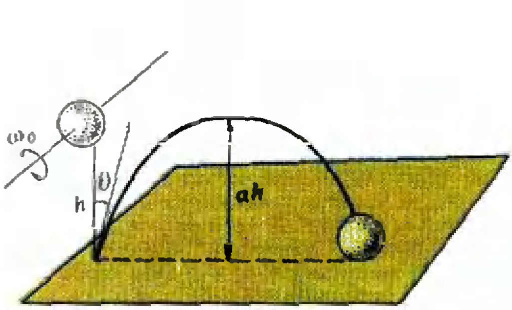


Рис. 1.

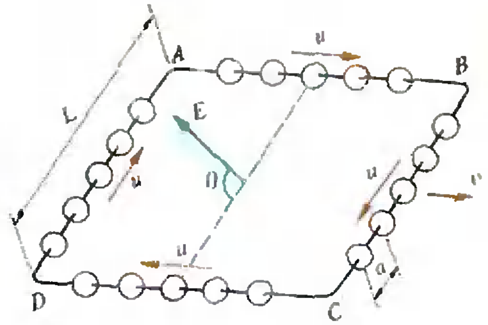


Рис. 2.

рез его центр, с угловой скоростью ω_0. Самая низкая точка шара находилась на высоте h над полом. После отпускания шар падает под влиянием силы тяжести на пол, ударяется, затем подскакивает до известной высоты ah. Вещества, из которых состоят пол и шар, таковы, что можно не учитывать деформаций, претерпеваемых этими телами во время столкновения. Коэффициент трения скольжения между шаром и полом μ, масса шара m. Считайте, что шар находится в вакууме и время столкновения очень мало (но не равно нулю). Используйте формулу $I=2/5mR^2$ для момента инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

1) Предполагая, что есть проскальзывание между шаром и полом в течение всего времени удара, найдите а) тангенс угла отскока θ; б) горизонтальное смещение центра шара между первым и вторым ударами о пол; в) минимальное значение ω_0 для этого случая.

2) Ответьте на вопросы пунктов а) и б), предполагая, что проскальзывание прекращается до истечения времени удара.

3) Постройте графики зависимости $\operatorname{tg}\theta$ от ω_0 для случаев 1) и 2).

Задача 2

По непроводящему витку в форме квадрата со стороной L с закругленными углами движется большое количество заряженных шаров малых размеров (рис. 2). Скорость каждого шара u, заряд q, расстояние между шарами a. Шары, как бусинки, надеты на стержни, составляющие виток, сторона L намного больше расстояния a. Непроводящие стержни, составляющие виток, заряжены с однородной плотностью заряда, которая компенсирует общий заряд всех шаров. Все это верно в системе отсчета, связанной с витком.

Рассмотрим случай, когда виток движется со скоростью $\vec{v}$ параллельно стороне AB в области, где существует однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярной скорости витка. Во время движения виток находится в плоскости, которая образует угол θ с направлением поля. Учитывая релятивистские явления, определите следующие величины в системе отсчета неподвижного наблюдателя, относительно которого виток движется со скоростью v:

1) расстояния между шарами на каждой из сторон витка;

2) результирующий заряд (стержни + шары) на каждой из сторон витка;

3) величину моментов электрических сил, стремящихся вращать виток вместе с шарами;

4) энергию взаимодействия витка и шаров с электрическим полем.

Примечания. Электрический заряд не зависит от системы отсчета, в которой измеряется. На рисунке показаны только относительные направления векторов. Излучением можно пренебречь.

Задача 3

Для детального изучения свойств отдельных атомов необходимо получить эти атомы в состоянии почти покоя в небольшой части пространства в течение определенного времени. В этих целях недавно стали использовать метод, получивший название метода охлаждения атомов с помощью лазера. Рассмотрим его основы.

Атомы ^{23}Na, возникающие при испарении натрия при температуре $T=10^3$ К, с помощью коллиматора формируются в узкий пучок и направляются в вакуумную камеру (рис. 3). По всему поперечному сечению пучок атомов освещается встречным пучком света мощного лазера. Частота лазера выбирается такой, чтобы произошло резонансное поглощение фотона атомами, скорость которых равна $\vec{v}_0$ и которые находятся в основном состоянии. Поглощая свет, атом переходит на первый возбужденный уровень с энергией E и шириной Γ (рис. 4), а его скорость меняется на некоторую величину $\Delta v_1=v_1-v_0$. Затем в результате спонтанной эмиссии атом излучает свет и возвращается в основное состояние, скорость его при этом изменяется на величину $\Delta v'=v'_1-v_1$ и отклоняется на угол φ от первоначального направления (рис. 5).

Этот порядок актов поглощения и излучения повторяется многократно до тех пор, пока скорость атомов не изменится на величину Δv и резонансное поглощение света частоты ν станет невозможным. В дальнейшем необходимо изменить частоту лазера, чтобы поддерживать резонансное поглощение на новой скорости и продолжать тормозить атомы, пока некоторые из них не снизят свою скорость до достаточно малой величины.

Для начального изучения явления можно не принимать во внимание никакие другие процессы взаимодействия атомов, исключая поглощение и спонтанную эмиссию света. Будем считать, что интенсивность излучения лазера настолько велика, что атом в основном состоянии сразу поглощает фотон.

Считая, что $E=3{,}36\cdot10^{-19}$ Дж, $\Gamma=7{,}0\times\times10^{-27}$ Дж, скорость света $c=3{,}0\cdot10^{8}$ м/с, масса протона $m=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, ответьте на следующие вопросы:

1) Какой должна быть частота ν лазерного излучения для того, чтобы обеспечить резонансное поглощение света атомами, энергия которых равна средней кинетической энергии атомов в области до прохождения коллиматора? На какую величину Δv_1 изменится скорость такого атома после первого поглощения фотона?

2) В каком интервале скоростей Δv_0 находятся атомы, которые могут поглотить фотон с частотой, вычисленной в пункте 1)?

3) На какой максимальный угол φ может рассеяться атом после однократного испускания фотона?

4) При каком максимальном уменьшении скорости Δv еще может поглотиться фотон той же частоты ν?

5) Оцените число актов поглощения — излучения, после которых атом, двигавшийся вдоль оси пучка, затормозится от v_0 практически до нулевой скорости.

6) Оцените длительность процесса излучения — поглощения фотона атомом. Какое расстояние пролетит атом за это время?

Нужно сказать, что подбор задач теоретического тура оказался вполне удовлетворительным, хотя задачи могли бы быть и несколько более сложными. Первая задача, относящаяся к теории вращательного движения твердого тела, достаточно традиционная. Она несколько выходит за рамки нашей школьной программы, но у тех, кто знаком с физикой в объеме факультативного курса, не должна вызывать особых трудностей.

Более сложной представляется вторая задача, относящаяся к теории относительности. Довольно замысловатое условие этой задачи можно сформулировать проще: по описанному в условии контуру течет электрический ток, а в системе отсчета, связанной с этим контуром, кроме электрического поля существует и магнитное. Впрочем, на олимпиаде решать задачу пришлось именно в первоначальном варианте. Формально она не выходит за рамки нашей школьной программы.

Третья задача связана с интересным физическим явлением — охлаждением светом (в журнале «Квант» № 5 за 1990 год этому явлению посвящена статья И. Воробьева). Решение этой задачи также вполне доступно нашим читателям. Справедливости ради заметим, что авторский вариант задачи Международная комиссия несколько упростила, сняв еще один вопрос — он относился к вероятности покинуть пучок для атома, пролетевшего определенное расстояние, и требовал довольно сложных рассуждений и расчетов. Такая возможность предусмотрена уставом МФО, в случае если это предлагается квалифицированным большинством (для тех, кто еще не освоился в достаточной степени с терминологическими тонкостями демократических процедур, заметим, что термин «квалифицированное большинство» относится не к качеству состава жюри, а к его количеству). Как бы то ни было, задача оказалась не очень сложной и довольно интересной.

Наши ребята неплохо справились с задачами теоретического тура, хотя были и досадные потери. Тем читателям, кто, прочитав условия задач, решил, что в них нет ровно ничего сложного и справиться с ними можно в два счета, хотелось бы напомнить, что есть большая разница между решением задач в домашних условиях и

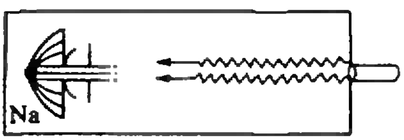


Рис. 3.

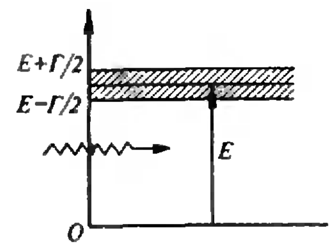


Рис. 4.

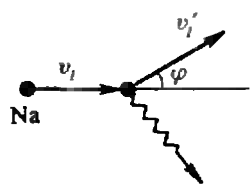


Рис. 5.

на олимпиадах. Особенно в дальних странах, где утром, днем и вечером очень жарко, а ближайший кондиционер воздуха находится в отеле, в котором живут руководители команд, еда порой хотя и вкусна, но непривычна, соперники из команды N прекрасно выглядят и сложные расчеты производят без единой ошибки, а размах крыльев местного таракана достигает — по слухам — полуметра. И хотя наша команда состояла из неоднократных победителей Всесоюзных физических олимпиад, прошедших нелегкий отбор и серьезно позанимавшихся в течение трех недель перед поездкой (впрочем, отдохнуть ребята тоже успели), даже они порой ошибались, причем иногда в довольно простых ситуациях.

Экспериментальный тур в этом году включал только одну задачу (по правилам МФО может быть или одна задача, или две). Задача эта была несложной — «черный ящик» для измерений на постоянном токе, однако требовала множества измерений и тщательного анализа полученных результатов. Мы не будем рассказывать об этой задаче подробно, скажем только, что в «ящике» были резистор (сопротивлением около 0,5 кОм), кремниевый диод и конденсатор большой емкости (примерно 150 мкФ), а для измерений были выданы два авометра, пара резисторов различных номиналов и источник постоянного тока с потенциометром на выходе.

Такая задача у наших участников не должна была вызвать серьезных затруднений (во всяком случае, при подготовке к МФО с очень похожими задачами ребята справлялись легко), однако не всё оказалось таким уж простым. У хозяев олимпиады не нашлось в достатке приборов и приспособлений не всех сразу, и эксперимент был организован в две смены (ничего особенно плохого в этом нет, иногда нам приходилось делать то же самое на Всесоюзных олимпиадах). В соответствии с алфавитом, наша команда попала во вторую смену, и ребятам предложили отправиться до обеда на экскурсию. Одному из наших «повезло» — с утра у него была температура за 38° (по шкале Цельсия), и он не поехал на экскурсию на вполне законных основаниях. Еще двое отказались ехать наотрез и предпочли, в нарушение правил, просто отдохнуть перед туром. А вот двое наших участников не смогли отказать организаторам и несколько часов провели в Ботаническом саду — они и «пролетели» на экспериментальном туре, получив в результате только бронзовые медали.

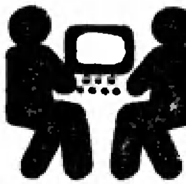
В результате трое из нашей команды получили золотые медали. Это Тимур Шутенко — у него абсолютно лучший результат в теоретическом туре и в сумме, Сергей Башинский и Александр Ляпин. Двое получили бронзовые медали — Сергей Добровольский (ему не хватило 1/4 балла до «серебра») и Винцас Тамошюнас.

Блестяще выступили в этом году ребята из Китая — все пятеро получили золотые медали. Они и стали первыми в неофициальном командном зачете, взяв реванш за прошлый год, когда наша команда обошла китайскую. (Справедливости ради стоит сказать, что китайцы обошли нас довольно сильно.) Вторыми оказались наши участники, сильно обогнав остальные команды.

Известно, что экономическое положение республики Куба сейчас не блестящее, однако олимпиада была проведена очень хорошо. Чрезвычайно добросовестно отнеслись хозяева олимпиады к составлению задач, на высоком уровне была проведена проверка работ. Все было организовано четко, в том числе и культурная программа для участников олимпиады и членов Международного жюри. Специально хочется отметить очень доброжелательную атмосферу, царившую на олимпиаде. Даже довольно оживленные дискуссии проходили в обстановке взаимного понимания и стремления к согласию.

Следующая, XXIII Международная физическая олимпиада будет проходить в Финляндии. Пожелаем же успехов ее участникам!

III Международная олимпиада по информатике



Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

В этом году III Международная олимпиада по информатике (МОИ) проходила в Греции с 19 по 24 мая. Несмотря на необычно ранние сроки проведения олимпиады, представители 22 стран Европы, Азии, Африки и Латинской Америки собрались в небольшом городке Анависсос на берегу Эгейского моря недалеко от Афин, чтобы определить сильнейших школьников в области информатики. Представители еще двух стран — Ирана и Южной Кореи — присутствовали в качестве наблюдателей.

В олимпиаде принимало участие 74 школьника, из них 5 — вне конкурса. В команду СССР по итогам выступлений на Всесоюзных олимпиадах и по результатам участия в зимних и весенних сборах вошли: Сергей Герштейн — выпускник лицея при УГУ г. Екатеринбурга, Антон Суханов — выпускник с. ш. 470 г. Санкт-Петербурга, Денис Уваров — выпускник с. ш. 11 г. Новокузнецка.

Поскольку организаторы рассчитывали на участие в олимпиаде значительно большего количества стран, причем для этого были все основания (число стран-участниц во II МОИ по сравнению с I МОИ увеличилось с 13 до 24), численный состав всех команд был уменьшен с 4 до 3 человек. Руководители команды В. Кирюхин и А. Денисенко после тщательного анализа уровня подготовки всех кандидатов в сборную СССР, включая Дениса Кима (с. ш. 10 г. Темиртау), Валерия Лепехина (с. ш. 132 г. Волгограда) и Валерия Хаменя (с. ш. 30 г. Гродно), остановили свой выбор именно на трех вышеназванных ребятах.

Греция — родина олимпийского движения. Проведение любого соревнования здесь проходит в лучших традициях, заложенных еще в древности. III МОИ также не была исключением. Организационный комитет олимпиады во главе с его президентом Х. Килласом, а также все службы во главе с президентом III МОИ проректором Афинского университета профессором Г. Филокипроу сделали все возможное, чтобы победители были определены в честной борьбе и каждый из участников увез с собой как можно больше впечатлений о неповторимой красоте этой удивительной страны.

Как и в прошлом году, III МОИ проходила в два тура. Оба тура предполагали использование персональных компьютеров. В распоряжение участников соревнования предоставлялись персональные компьютеры IBM PC/XT и одна из следующих интегрированных сред программирования: TURBO PASCAL Ver. 5.5, QUICK BASIC Ver. 4, GWBASIC, MICROSOFT C Ver. 5, TURBO C++, LCN LOGO Ver. 2.0, IBM LOGO, LOGOWRITER, FORTRAN 77 Ver. 4+. Большинство ребят писали свои программы в рамках системы TURBO PASCAL Ver. 5.5.

Научным комитетом олимпиады на рассмотрение международного жюри было представлено к первому туру 4 задачи, ко второму — 3. Перед каждым туром голосованием выбиралась одна задача. Приведем их (обе эти задачи были предложены представителями Греции).

Задача I тура

Пронумеровать позиции в матрице (таблице) размером 5×5 следующим образом. Если номер i ($1\leqslant i<25$) соответствует в матрице позиции с координатами (x, y), то номер $i+1$ может соответствовать позиции с координатами (z, w), вычисляемыми по одному из следующих правил:

1) $(z, w)=(x\pm3, y)$;
2) $(z, w)=(x, y\pm3)$;
3) $(z, w)=(x\pm2, y\pm2)$.

Требуется:

A) написать программу, которая последовательно нумерует позиции матрицы 5×5 при заданных координатах позиции, в которой проставлен номер 1 (результаты должны быть выведены в виде заполненной матрицы);

B) вычислить число всех возможных расстановок номеров для всех начальных позиций, расположенных в правом верхнем треугольнике матрицы, включая ее главную диагональ.

Пример. Если в качестве начальной позиции в матрице выбрана позиция с координатами (2, 2), то на данном шаге координаты позиции с номером 2 в соответствии с представленными правилами могут быть: (2, 5), (5, 2) или (4, 4).

Задача II тура

S-терм — это последовательность символов S и скобок, определяемая рекурсивно следующим образом:

символ S есть S-терм;

если M и N — S-термы, то выражение (MN) есть также S-терм.

Пример S-терма: ((((SS)(SS))S)(SS)).

Правые скобки не несут информации и могут опускаться. В этом случае вышеприведенный S-терм выглядит так: ((((SS)(SS))S)(SS.

1. Напишите процедуру «gensterm» для порождения S-термов. Она должна для заданного n заполнять n текстовых файлов (n=длина=число символов 'S'), каждый из которых содержит все S-термы длины 1, 2,..., n соответственно. Внутри файла S-термы разделяются символом ';'. В конце каждого файла должен стоять символ '.' (точка).

Напишите программу, которая по заданному целому n ($n\leqslant 10$) выполняет описанную выше процедуру и выдает на дисплей все сгенерированные S-термы.

Рассмотрим исчисление S-термов. Единственное алгебраическое правило (S-правило), которое может быть использовано, состоит в следующем: любой подтерм S-терма, имеющий вид (((SA)B)C), где A, B и C — также S-термы, может быть переписан как ((AC)(BC)), т. е.

Context1(((SA)B)C)Context2→

→Context1((AC)(BC))Context2.

Применение этого правила к S-терму называется *редукцией* S-терма. Возможны разные способы (стратегии) выбора подтермов для применения S-правила. Последовательное применение S-правила к S-терму до тех пор, пока это возможно, называется *нормализацией*.

Пример цепочки редукции S-терма:

((((SS)(SS))S)(SS))→(((SS)((SS)((SS)S))(SS))→

→((S(SS))(((SS)S)(SS)))→

→((S(SS))((S(SS))(S(SS)))).

2. Предложите эффективную структуру данных для представления S-термов, облегчающую применение S-правила. Напишите две процедуры: «readterm» и «printterm». Первая из них преобразует S-термы в Вашу структуру данных из формы, порождаемой процедурой «gensterm»; вторая преобразует S-термы из Вашей структуры в форму, порождаемую процедурой «gensterm». Ваша программа должна демонстрировать эти преобразования.

3. Напишите процедуру «reduce», выполняющую один шаг редукции в соответствии с S-правилом над заданным подтермом S-терма в Вашем представлении. Программа должна продемонстрировать это.

4. Напишите процедуру «normalize», которая в заданном S-терме должна последовательно выбирать подтермы и применять S-правило до тех пор, пока дальнейшие редукции станут невозможными, либо число шагов достигнет некоторого максимума, например 30. Ваша программа должна продемонстрировать это.

5. Объедините все процедуры в одну программу, которая:

а) запрашивает у пользователя длину n;

б) порождает с помощью процедуры «gensterm» все S-термы заданной длины;

в) преобразует эти S-термы в Ваше представление;

г) нормализует их (если это возможно);

д) выводит в качестве результата нормализованные S-термы;

е) выводит последовательно число шагов редукции, совершенных над каждым S-термом, либо сообщение «not normalized», если нормализация требует более 30 шагов.

ж) выводит число ненормализованных термов и общее число всех S-термов заданной длины n.

Решение задачи каждого тура оценивалось исходя из 100 баллов. Международное жюри перед началом каждого тура утверждало критерии оценки выбранных задач, в процессе проверки они четко соблюдались. Ни одна неточность даже в отображении результатов не прощалась и жестко наказывалась.

По задаче I тура начислялось: за п. A — 50 баллов, за п. B — 25, за вывод — 15, премия жюри — 10; по задаче II тура: за п. 1 — 20 баллов, за п. 2 — 25, за п. 3 — 15, за п. 4 — 20, за п. 5 — 10, премия жюри — 10. Всю эту информацию участники олимпиады получали вместе с условием задачи.

Задача I тура для всех участников оказалась несложной. Достаточно сказать, что 44 школьника получили более 90 баллов за решение этой задачи, хотя только двое набрали максимально возможные 100 баллов. В этой большой группе были и все три участника сборной СССР, однако небольшие неточности в представлении итоговых результатов не позволили им набрать 100 баллов, как членам команд Чехо-Словакии и Таиланда. Лучший из наших ребят в этом туре Сергей Герштейн получил 99 баллов.

Задача II тура оказалась крепким орешком для всех. Фактически результаты решения этой задачи сыграли решающую роль в окончательном распределении мест. На этот раз только четыре участника (представители Чехо-Словакии, Китая, Венгрии и Югославии) получили более 80 баллов, именно они и заняли верхние строчки в итоговой таблице. Результаты наших ребят: Д. Уваров — 51 балл, А. Суханов — 39 баллов, С. Герштейн — 37 баллов.

По итогам двух дней соревнований все советские школьники получили по серебряной медали. Обидно, что лучшему из них — Д. Уварову чуть-чуть не хватило, чтобы получить золотую медаль. В общем зачете он оказался восьмым, а только семь первых участников получили золотые медали.

На этой олимпиаде как всегда очень сильно выступили китайские школьники. В их копилке оказались две золотые и одна серебряная медали. Немного уступили им представители Чехо-Словакии, удачное выступление которых явилось для всех неожиданностью. Более того, их участник Игорь Мали стал абсолютным победителем III МОИ, получив в награду за это персональный компьютер IBM PC. Сборная СССР в командном зачете на сей раз оказалась на пятом месте, пропустив вперед еще команды Венгрии и Югославии. Победители предыдущих олимпиад команда Болгарии и традиционно сильная команда теперь уже объединенной Германии заняли соответственно 9 и 8 места.

В целом сборная СССР выступила на этой олимпиаде вполне достойно, и результаты отражают состояние дел в области школьной информатики в нашей стране. Как показал анализ работ, алгоритмическая подготовка всех советских школьников не уступает победителям, а может быть даже превосходит. Однако их техническая подготовка не соответствует тем повышенным требованиям, которые позволяют побеждать на олимпиадах по информатике. Сказывается «компьютерный голод», который даже для наших талантливых ребят мы не можем устранить — участники практически всех команд дома имели свободный доступ к персональным компьютерам, а для наших школьников это остается проблемой. К тому же сказывается наша давняя болезнь, связанная со стремлением выделить в информатике теоретическую часть и практическую, причем с акцентом на первую. Показателем этого являются проводимые на всех уровнях олимпиады по информатике, где алгоритмическая сторона решения задач оценивается порой даже выше, чем реализация алгоритма на компьютере, причем мотивируется это тем, что олимпиады проводятся по информатике, а не по скорости машинописи.

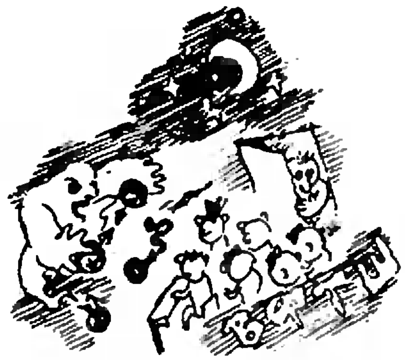
Нельзя не сказать еще об одном факте, который отметили организаторы данной олимпиады. Среди победителей все чаще оказываются достаточно молодые участники. Теперь уже 15-летним возрастом победителей никого не удивишь. К сожалению, даже для олимпиады по информатике всесоюзного уровня участие школьников 7—9 классов является редкостью. Несомненно, что от более раннего привлечения школьников к информатике зависит многое, и нам, чтобы не потерять ведущие позиции, необходимо обратить на это более пристальное внимание. В противном случае отставание неизбежно.

Помимо сборной СССР на III МОИ была представлена самостоятельной командой Белоруссия как член ООН и ЮНЕСКО. Результаты выступления белорусских школьников: Владимир Свидерский — 125 баллов (бронзовая медаль), Владимир Белый — 96 баллов, Владимир Кабак — 87 баллов.

На закрытии МОИ представитель Германии от имени своего правительства пригласил присутствующих на олимпиаду по информатике 1992 года в Бонн.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

ЗФТШ — 25 лет



Вы — читатели «Кванта». Значит, знаете все лучшие вузы страны и среди них — Московский Физтех. Но туда принимают лишь самых, самых, самых. А внутренне вы уверены, что можете там учиться, и очень этого хотите, и готовы приложить все усилия для достижения желанной цели.

Каждый разрешает эту проблему по-своему: спецкласс, лицей, репититор. Но если таких возможностей нет (или спецкласс, репититор кажутся качественно недостаточными), информация о ЗФТШ будет для вас особенно полезной.

Заочная физико-техническая школа — это учитель и помощник. Строгий учитель и надежный помощник, если ваше самое большое желание — поступить в один из самых престижных и лучших вузов страны, готовящий специалистов в области электроники, космонавтики, лазерной техники, математического моделирования, биофизики.

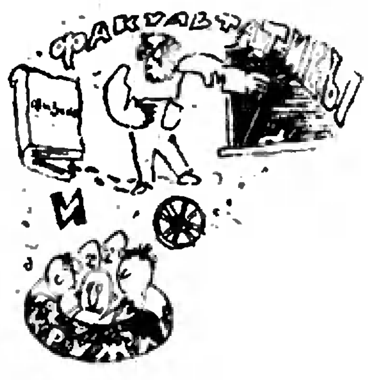
Скажем сразу, ЗФТШ — не для любого мечтающего школьника. Она для энергичного, одаренного, трудолюбивого и целеустремленного. Именно для такого учащегося и существует ЗФТШ и всегда готова ему помочь. Помочь в том, чтобы достичь уровня абитуриента первоклассного вуза и прежде всего Физтеха, при котором эта школа родилась и работает уже 25 лет.

Вуз с углубленным изучением математики и физики, тем более работающий и обучающий по своей уникальной системе, не может принять любого выпускника средней школы. Для обучения в таком вузе нужен высокий уровень знаний, умений, навыков. За 3 года активной учебы в ЗФТШ такой уровень может быть достигнут. Школа углубляет и расширяет физико-математические знания своих учащихся, приучает к самостоятельной и тщательной работе, готовит их к сдаче вступительных экзаменов и дальнейшему обучению в высшей школе.

Программа и методика ЗФТШ шлифовались многие годы, прекрасно зарекомендовали и оправдали себя. За годы работы ЗФТШ через нее прошли 44 000 школьников, 7 000 из них стали физтехами, и сейчас каждый второй студент МФТИ — выпускник ЗФТШ.

ЗФТШ — это уже целая история. Даже, можно сказать,— философия. Если вы будете студентами, вам это станет ясно. Недаром один выпускник ЗФТШ сказал (уже будучи студентом), что МФТИ — это одна большая ЗФТШ.

Т. Пиголкина,
методист-консультант по математике ЗФТШ,
Т. Чугунова, директор ЗФТШ



Новый набор в ЗФТШ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся средних школ, расположенных на территории РСФСР, в *9*, *10* и *11* классы на 1992/93 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах, где такая помощь особенно необходима.

Обучения в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружка или факультатива набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса в 1992/93 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей кружка или факультатива следует выслать *до 25 мая 1992 года* по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив». (Тетради с работами учащихся в ЗФТШ высылать не надо.) Работа руководителей заочных физико-технических кружков и факультативов может оплачиваться школой по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, которые хотят выработать навыки систематической, продуктивной самостоятельной работы. Работы учащихся-заочников проверяют преподаватели, аспиранты и студенты МФТИ, ЛГУ и КрГУ (часто — выпускники ЗФТШ). Работу членов физико-технического кружка и факультатива оценивают их руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах в ряде московских школ, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону: 408-51-45.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу выполните на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраните тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку на-

	Образец
1. Область (край или АССР)	Тульская область
2. Фамилия, имя, отчество	Алешин Николай Васильевич
3. Класс, в котором Вы учитесь	девятый
4. Номер, адрес и телефон школы (обычная, спецшкола, спецкласс, с каким уклоном)	№ 6, ул. Центральная 5, г. Алексин, телефон: 2-73-64, обычная
5. Фамилия, имя, отчество Вашего преподавателя	
по физике	Тоткал Нина Семеновна
по математике	Тарасова Ирина Анатольевна
6. Место работы и должность родителей	
отец	МКЦЗ, штамповщик
мать	Алексинский химкомбинат, цех № 2, аппаратчица
7. Подробный домашний адрес	301340, г. Алексин Тульской обл., ул. Горная, д. 6-а, кв. 74, тел. 2-60-93
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения	
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ	

№ п/п													
Ф.													
М.													

клейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательно печатными буквами, по образцу (см. с. 67).

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с написанным на нем вашим адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1992 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1992 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Костромской, Мурманской, Новгородской, Петербургской, Псковской, Пермской, Тверской, Ярославской областей, Карельской, Удмуртской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Камчатской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской, Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует обратиться по адресу: 252680, г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 444-95-24.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов, 2—8 — для девятых классов, 7—13 — для десятых классов. В задании по математике задачи 1—6 — для учащихся восьмых классов, 3—9 — для девятых классов, 6—12 — для десятых классов. (Номера классов указаны для текущего, 1991/92 учебного года.)

Вступительное задание

Физика

1. Велосипедист едет по пересеченной местности. Когда дорога идет в гору, его скорость составляет 5 км/ч, с горы — 20 км/ч. Какова его средняя скорость, если общий путь, пройденный при подъеме, такой же, как и при спуске?

2. Три грузовика возят песок из пункта A в пункт B. Из пункта A они отправляются с интервалом в 1 ч. Скорость груженого автомобиля $v=30$ км/ч. Разгрузившись в B, они сразу же отправляются обратно со скоростью $u=50$ км/ч. На обратном пути первый грузовик встречает вышедшие после него машины. Через какое время после встречи с третьим грузовиком первый грузовик вернется в пункт A? Расстояние между A и B равно 100 км.

3. Двигательная установка ракеты состоит из пяти двигателей: основного, развивающего мощность P_1, и четырех вспомогательных, развивающих мощность P_2 каждый. Во время испытаний первые t секунд работает только основной двигатель, а затем на такое же время включаются еще и вспомогательные двигатели. Известно, что все двигатели имеют одно и то же значение КПД. Определите КПД двигателя, если известно, что за время испытаний израсходовано топливо массой M с теплотворной способностью q.

4. Деревянный кубик плавает в воде так, что в воду погружено 90 % его объема. Какая часть объема будет погружена в воду, если поверх воды налить слой масла с плотностью $\rho=0{,}8$ г/см^3, полностью закрывающий кубик?

5. Сколько медных деталей, нагретых до 100 °С и имеющих массу $m=1$ кг каждая, можно охладить до температуры 30 °С в сосуде, содержащем $V=100$ л воды при температуре 15 °С? Удельная теплоемкость меди $c_м=376$ Дж/(кг · К), воды $c_в=4{,}2$ кДж/(кг · К). Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

6. В сосуде находится лед. Для нагревания сосуда вместе со льдом от 270 К до 272 К требуется количество теплоты Q. Для дальнейшего нагревания от 272 К до 274 К требуется количество теплоты в 20 раз большее, чем Q. Определите массу льда в сосуде до нагревания. Потерями тепла пренебречь. Теплоемкость сосуда $C=600$ Дж/К.

7. К батарее через переменное сопротивление R подключен вольтметр. Если сопротивление R уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если сопротивление R увеличить в три раза? Сопротивление вольтметра равно r, а внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

8. Какую площадь поперечного сечения должна иметь свинцовая проволока предохранителя, чтобы при прохождении через него тока $I=1$ А «перегорание» происходило через $\tau=1$ с? Начальная температура проволоки $t_0=20$ °С, температура плавления свинца $t=327$ °С, длина проволоки $L=2$ см, удельное сопротивление свинца $\rho=1{,}6\cdot10^{-6}$ Ом · м, его удельная теплоемкость $c=125$ Дж/(кг · К) и плотность $d=11{,}3$ г/см^3. Потерями тепла в окружающее пространство пренебречь.

9. Пуля массой m, летящая горизонтально, попадает в деревянный брусок массой M, подвешенный на нити длиной L, и застре-

вает в нем. Какова была скорость пули перед попаданием в брусок, если известно, что максимальный угол отклонения нити от вертикали равен α?

10. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, лежит брусок. Если бруску сообщить скорость, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, то до полной остановки он пройдет расстояние L_1. Если же бруску сообщить такую же по величине скорость, но направленную вниз вдоль наклонной плоскости, то он пройдет до полной остановки расстояние L_2. Определите коэффициент трения бруска с поверхностью наклонной плоскости, если известно, что $L_2/L_1=3$.

11. Моль идеального одноатомного газа, первоначально находившийся при нормальных условиях, переводят в состояние с вдвое бо́льшим давлением. Процесс перевода слагается из двух участков — изобары и изохоры. Газу во время процесса подведено количество теплоты Q. Найдите конечную температуру газа.

12. В вертикально расположенном цилиндре под поршнем массой $M=1$ кг находится влажный воздух с относительной влажностью $\varphi=100\,\%$. Цилиндр отклоняют от вертикали на угол $\alpha=30°$. Определите влажность воздуха в новом положении. Температура поддерживается постоянной и равной $t=100\,°C$. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, сечение поршня $S=10^{-3}$ м^2.

13. Два последовательно соединенных конденсатора с емкостями $C_1=C$ и $C_2=2C$ подключают к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$. Параллельно конденсатору C_1 подключают конденсатор с неизвестной емкостью C_3. Разность потенциалов на конденсаторе C_2 увеличилась при этом в два раза. Определите емкость конденсатора C_3.

Математика

1. В десятичной записи некоторого числа 1996 цифр: 1992 тройки и цифры 1, 9, 9, 2 выписаны в произвольном порядке. Докажите, что это число не может быть полным квадратом.

2. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данной высотой, опущенной на это основание, равнобедренный имеет наименьший периметр.

3. Найдите все такие натуральные числа k, что уравнение

$$x^2-kx+k=0$$

имеет целые корни.

4. Решите неравенство

$$\left|\frac{1+x}{1-x}\right|<1.$$

5. Составьте из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 два трехзначных числа так, чтобы их произведение было наибольшим (каждая цифра должна быть использована один раз).

6. Найдите все значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $1\leqslant x\leqslant 2$ является решением неравенства $x^2-ax+1<0$.

7. На координатной плоскости задан равнобедренный треугольник, координаты вершин которого — целые числа, а одна из сторон равна $2\sqrt{2}$. Докажите, что площадь этого треугольника выражается целым числом.

8. При каких значениях параметров a и b многочлен

$$x^4+24x^3+ax^2+1992x+b$$

будет квадратом многочлена второй степени?

9. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD ($\angle C=90°$). Найдите $\operatorname{tg} A$, если длины отрезков AD, AC и BC образуют геометрическую прогрессию.

10. Бильярд имеет форму правильного треугольника со стороной a. Точечный шар, выпущенный из вершины, после трех отражений от бортов попал в другую вершину. Найдите длину пути шара.

11. Модели многогранников делают из плоских разверток. Найдите все развертки куба и изобразите их на рисунке. Можно ли какими-то одинаковыми развертками замостить всю плоскость без пропусков и перекрытий?

12. Окружность и парабола пересекаются в четырех точках. Докажите, что центр тяжести этих точек лежит на оси параболы.

Задачи заочного вступительного экзамена в ФМШ МГУ и ФМШ НГУ

Специализированные учебно-научные центры МГУ и НГУ, созданные на базе школ-интернатов при этих университетах, проводят заочные вступительные экзамены по математике и физике для учащихся 9-х и 10-х классов 11-летней школы, интересующихся математикой и физикой.

Успешно выдержавшие заочный экзамен по решению приемной комиссии будут в апреле — мае приглашены в областные центры СССР на устный экзамен.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради. На первой странице укажите свои данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
2. Домашний адрес (подробно), индекс
3. Подробное название школы и класс

Работы отправляйте простыми бандеролями (в работу вложите почтовый конверт с вашим домашним адресом). Если вы проживаете в Европейской части РСФСР или в Белоруссии, высылайте вашу работу по адресу: 121357, Москва, Кременчугская ул., 11, ФМШ МГУ, приемная комиссия, заочный экзамен. Если же вы живете на Дальнем Востоке или в Средней Азии, пишите по адресу: 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 6, учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет. Срок отправки работ — не позднее 14 февраля 1992 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут. Если вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач. Желаем успеха!

9 класс

1. Найдите все числа x и y, для которых
$$5x^2+2y^2-6xy+10x-6y+5=0.$$

2. Из натурального числа вычли сумму его цифр, а затем из полученной разности вычеркнули одну цифру. Какая цифра была вычеркнута, если сумма оставшихся цифр равна 1991?

3. Какая из дробей больше:
$$\frac{a+b}{b+d} \text{ или } \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right),$$
если $a/b<c/d$ и $b<d$?

4. Окружность с центром в середине стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC и CD. Найдите длину стороны AD, если $AB=a$, $CD=b$.

5. Три груза, массой $m=1$ кг каждый, связаны через систему невесомых блоков невесомыми и нерастяжимыми нитями (рис. 1). Определите силу, действующую со стороны системы на потолок. Трением пренебречь.

6. Подводный аппарат массой m имеет вид цилиндра с площадью основания S, составленного из двух полых половинок. Аппарат находится в положении устойчивого равновесия на глубине H, равной расстоянию от поверхности воды до средней линии цилиндра. Найдите силу, действующую на одну половинку цилиндра со стороны другой половинки.

7. Найдите вес тела массой m на экваторе. Радиус Земли на экваторе $R=6350$ км.

8. Два спортсмена перебрасывают мяч. Мяч, брошенный под углом к горизонту, находится в полете $\tau=2$ с. На какую максимальную высоту поднимается мяч?

10 класс

1. Ученик, решая квадратное уравнение, допустил ошибку при переписывании, переставив между собой старший коэффициент и свободный член уравнения. При этом оказалось, что один найденный им корень является корнем исходного уравнения, а второй корень, равный числу -3, нет. Найдите корни исходного уравнения.

2. Найдите все числа x и y, для которых
$$y^4+4y^2x-11y^2+4xy-8y+8x^2-40x+52=0.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен $30°$, H — точка пересечения высот, A_1 — центр окружности, вписанной в треугольник HBC, C_1 — центр окружности, вписанной в треугольник HBA. Найдите угол между прямыми AA_1 и CC_1.

4. Какая из дробей больше:
$$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \text{ или } \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)$$
если $a_1/b_1<a_2/b_2<a_3/b_3$ и $b_1<b_2<b_3$?

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка пересечения биссектрис углов ABC и BCD лежит на стороне AD. Найдите длину стороны AD, если известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и $AB=a$, $CD=b$.

6. Два груза, массой $m=1$ кг каждый, соединены через систему невесомых блоков невесомыми и нерастяжимыми нитями (рис. 2). Определите силу, действующую со стороны системы на потолок.

7. Найдите заряд, который протечет через ключ после его замыкания (рис. 3). Напряжение источника, сопротивления резисторов и емкости конденсаторов известны.

8. Протон массой m движется в однородных электрическом и магнитном полях. Векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$ направлены вдоль оси Z. В момент времени $\tau=0$ протон находился в начале координат, его начальная скорость была направлена вдоль оси X. Найдите координаты точек пересечения траектории протона с осью Z.

9. Пробирка длиной l, содержащая воздух с относительной влажностью $\varphi=100\,\%$, полностью погружена в воду. На каком уровне установится поверхность воды в пробирке? Температура в начальном и конечном состояниях одинакова. Давление насыщенных паров $p_н<p_{атм}$.

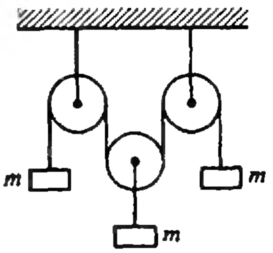


Рис. 1.

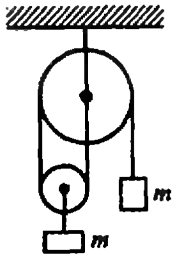


Рис. 2.

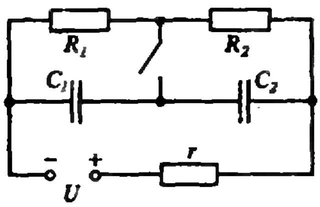


Рис. 3.

„Квант" улыбается

В ночь перед Рождеством

В ночь перед Рождеством, сами знаете, непременно происходят чудеса. То Дед Мороз принесет подарки, а то черт украдет луну.

А то еще некоторые гадают и очень интересные вещи про себя узнают. Вот Светлана (помните, у Жуковского?) башмачок за ворота кидала. А Татьяна (это уже у Пушкина) спрашивала имя у первого встречного. «Смотрит он — и отвечает: «Агафон».

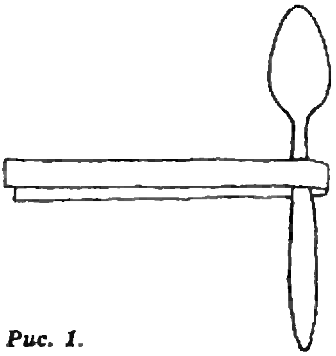


Рис. 1.

Помните? Кто ставит свечи перед зеркалом... Кто воск капает... Да мало ли способов выведать у потусторонних сил свое будущее?

Так и в нынешнее время: собираются вечером у елки, устраивают обстановку потаинственнее — и начинают священнодействовать. У каждого любителя гадания свой метод. Например, одна моя хорошая знакомая*) предпочитает вызывать духов.

Делается это очень просто. Никаких особых приспособлений не требуется. Достаточно найти в хозяйстве четыре чайные ложки и лист бумаги.

Не спрашивайте, почему ложки именно чайные, какого качества должна быть бумага и какие заклинания положено произносить. Признаться, меня интересовала только техническая сторона дела.

Технология же вызова духов такова. Вы берете в одну руку ложку, в другую — сложенную пополам узкую длинную полосочку бумаги (см. рис. 1). Теперь продеваете в бумажную петельку ручку ложки и, держа бумажку за сложенные вместе концы, плотно наматываете ее на ложку (рис. 2). Готово? Кладите ложку на стол. Теперь повторяем ту же операцию с остальными ложечками. Надо расположить их крестом. Зачем — не могу вам сказать. Возможно, тогда духи-христиане охотнее явятся на ваш зов.

Ну вот, ложки разложены. Можете спрашивать: «Николай Васильевич Гоголь, здесь ли Вы?» (Вы понимаете, Гоголя я называю для примера. Но и в самом деле, хотелось бы знать — он сам видел черта с луной под мышкой или поверил свидетельству Солохи?) Теперь разматываем бумажки, взявшись за оба конца полоски одной рукой. Если почтенный дух пришел и готов беседовать, происходит чудо: хотя бы одна из ложечек... вынимается из бумажной петельки, будто вы ее и не продевали!

Дальше можно спрашивать о чем угодно. Заматываете ваши ложки снова, задаете незримо присутствующему авторитету вопрос, разворачиваете бумажки. Случилось вышеописанное чудо — «да», не случилось — «нет».

Сильнейшее впечатление это гадание произвело на моего соседа. Он не верит в духов — уж такой законченный материалист. К тому же Лев Толстой обещал ему генеральские погоны в ближайшем будущем (а он даже не майор).

Но если не веришь в потусторонние силы, приходится искать научное объяснение. Мой сосед наутро после гадания принялся ставить эксперименты. Оказалось, что шариковая ручка, ключ от квартиры, ржавый гвоздь ничем

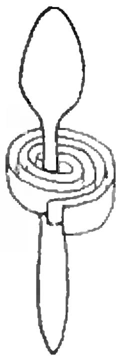


Рис. 2.

не хуже чайных ложек — бумажка довольно часто снимается и с этих предметов. Он даже установил, что «маленькое чудо» происходит приблизительно в одном случае из четырех. Это значит, что при гадании по всем правилам положительный ответ получается достаточно часто (ложек четыре, и нужно, чтобы полоска сн\u044fлась хотя бы с одной).

Но объяснения найти не удавалось.

И тут пришел математик. Он один раз повторил опыт, засмеялся и растолковал, в чем тут дело.

В самом деле, в чем?

(В конце номера есть ответ.)

А. Котова

*) А также дяди школьника из Ростова Олега Ярошенко, предложившего тему этой заметки.

Ответы, указания, решения

[redacted]емы счисления

1. 201011011100010.
2. $((24\cdot 60+2)60+32)60+42=5\,193\,162$.
3. $9(18\cdot 20^4)+6(18\cdot 20^3)+14(18\cdot 20^2)+$ $+13(18\cdot 20)+15\cdot 20+1=12\,489\,781$.
4. а) 722634; б) 7180; в) 11110001001000000.
5. Полезно заготовить таблицу степеней 2:

n	2^n	n	2^n
0	1	5	32
1	2	6	64
2	4	7	128
3	8	8	256
4	16	9	512

Ответ: $P=32+4=36$, $Q=256+64+16+$ $+4+1=341$.

6.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

7. а) $X=19$; б) запись Y не означает никакого числа (см. упражнение 8); в) $Z=49$.
8. Любая последовательность «$a_na_{n-1}...a_0$», в которой $a_{3k}\leqslant 1$, $a_{3k+1}\leqslant 2$, $a_{3k+2}\leqslant 1$ при всех k и после двойки нигде не стоит единица (проверьте, что это условие необходимо и достаточно для того, чтобы неравенство $a_{k+1}>a_kq_k+$ $+a_{k-1}q_{k-1}+...+a_0q_0$ выполнялось при всех k).
9. Да. Первое больше.
10. в) Если гири класть на одну чашку весов, то наименьшее необходимое число гирь — 10. Можно взять, например, такие гири: 1, 2, 4, 8, ..., $512=2^9$. Девяти гирь (любого веса) заведомо недостаточно, поскольку из них можно выбрать всего $2^9-1=511$ разных комбинаций, состоящих из одной или нескольких гирь; даже если все эти комбинации дают разные веса, то все равно мы не получим все веса от 1 до 1000.

Если гири класть на обе чашки весов, то наименьшее необходимое число гирь — 7. (Например, годятся такие: 1, 3, 9, 27, ..., $729=3^6$; см. упражнение 11.) Шести гирь недостаточно, поскольку отображений множества из 6 элементов во множество из трех элементов {левая чашка; правая чашка; коробка с гирями} всего $3^6=729$, а различных чисел $P_л-P_п$, где $P_л$ и $P_п$ — вес гирь на левой и правой чашке весов, должно получаться не менее 2001 (от -1000 до $+1000$).

13. $2q_n\leqslant q_{n+1}$; $q_{n-1}+q_n\leqslant q_{n+1}$.
14. а) $\underbrace{10...0}_{k-l-1}\underbrace{10...0}_{l}$, если $k-l\geqslant 2$;
$\underbrace{10...0}_{k+1}$, если $k-l=1$; $100\underbrace{10...0}_{l-2}$, если $k=l\geqslant 2$;
и $10+10=101$; $1+1=10$;
б) $\underbrace{100...0}_{2m+1}$; например, $10101+1=100000$;
в) $\underbrace{1010...10}_{2m+2}$; например, $10101+10000=101010$.

15. Рассматривая таблицу, где числа записаны в фибоначчиевой системе счисления, нетрудно заметить, что a_k — последовательность всех натуральных чисел, оканчивающихся в этой системе цифрой 1 или четным число нулей, b_k — последовательность всех чисел, оканчивающихся нечетным числом нулей (при этом b_k получается из a_k приписыванием одного нуля в конце). Продолжите нашу таблицу, убедитесь, что такая закономерность сохраняется, и докажите это строго. Теперь легко ответить на вопрос о числе 100 (сто): поскольку в системе с базисом 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... $100=89+8+3=1000010100$, то 100 принадлежит последовательности a_k, соответствующее b_k равно $10000101000=144+13+$ $+5=162$, $k=b_k-a_k=100010100=55+5+$ $+2=62$, т. е. $100=a_{62}$.

[redacted]нт» для младших школьников

1. Обозначим количество купленных авторучек через x, портфелей через y и микрокалькуляторов — через z. Из условий задачи составляем систему уравнений: $x+y+z=100$, $x+10y+$ $+50z=500$. Отсюда $9y=400-49z$. Число z неотрицательно, но меньше девяти. Единственное значение z в этом диапазоне, при котором $400-49z$ делится на 9, равно 1. При этом $y=39$, и $x=60$.
2. Из условия следует, что числа в клетках, отстоящих друг от друга на две клетки, равны между собой. Отсюда, обозначив через x число в первой клетке, получим следующее заполнение таблицы:

17	20	x	17	20	x	17	20	x	17	20	x

Так как сумма всех 12 чисел равна 200, то $4x+148=200$, отсюда $x=13$.
3. Так как первоначальное число яблок делится на 3, то обозначим его через $3k$. Старший сын оставил $2k+1$ яблоко. Это число тоже должно делиться на 3: $2k+1=3p$. Он оставил

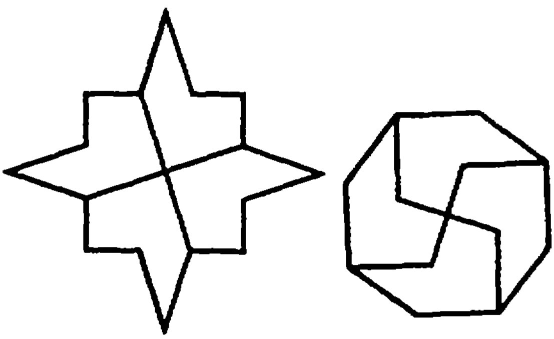


Рис. 1.

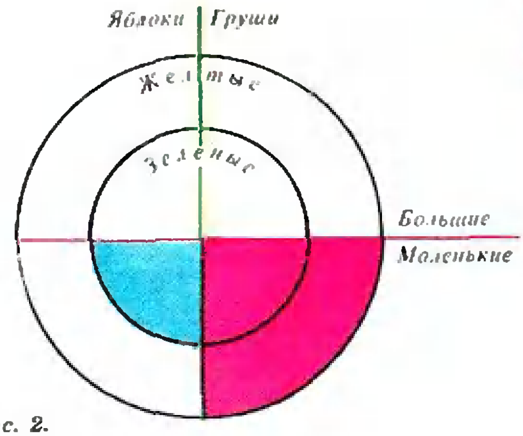


Рис. 2.

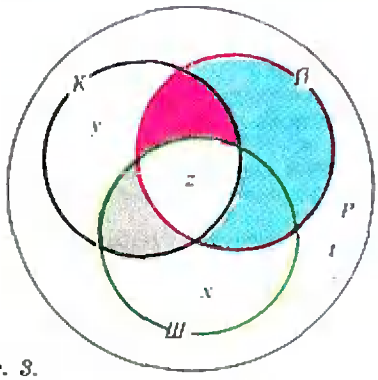


Рис. 3.

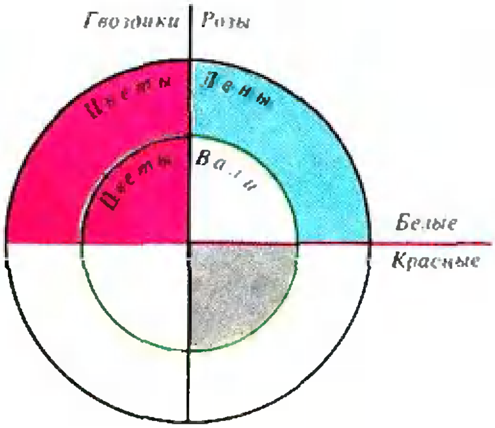


Рис. 4.

$n=2p+1$ яблоко. Выражая p через k, получим: $n=(4k+5)/3$. Это число будет целым при $k=3s+1$. Отсюда $n=4s+3$. Тогда $n=3$ при $s=0$, $n=7$ при $s=1$, $n>10$ при $s>1$. Но по условию n не делится на 3, следовательно, $n=7$, $s=1$, $k=3$. Итак, первоначально в корзине было $3\cdot 4=12$ яблок.

4. См. рис. 1.

5. $145826+948947=1094773$.

Диаграммы Эйлера — Венна

1. Больших желтых яблок было 7. Соответствующая диаграмма Эйлера — Венна изображена на рисунке 2.

2. Бригада строителей состояла из 14 человек. Условия задачи приводят к рисунку 3. Составив систему уравнений и приняв неизвестное y за параметр, получим

$$x=(15-3y)/2,\ z=(5y-9)/3,\ t=(15-y)/2.$$

Дополнительные условия сводятся к следующим требованиям: $x\neq 0$, $\frac{9}{5}<y\leqslant 5$, y — нечетное число. Отсюда $y=3$.

3. В туристической секции было 15 ребят.

4. Лена принесла 5 красных гвоздик и 4 красные розы, а Валя принесла 6 красных гвоздик и 3 белые розы. Соответствующая диаграмма Эйлера — Венна изображена на рисунке 4. Составив систему уравнений и приняв неизвестное t за параметр, получим

$$x=(5t-10)/2,\ z=(18-3t)/2,\ y=5t-14.$$

Дополнительные условия сводятся к следующим требованиям: $\frac{14}{5}<t\leqslant 6$, t — четное число; среди цветов были белые цветы, значит, $z\neq 0$. Отсюда $t=4$.

5. В походе участвовало 15 ребят.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. В медной.

2. Более мощная лампа имеет меньшее сопротивление, а сила тока, протекающего через лампы, одинакова. Следовательно, менее мощная лампа будет гореть ярче.

3. В резисторе сопротивлением R_2.

4. В момент замыкания ток в цепи будет наибольшим из-за того, что сопротивление холодного металла меньше, чем раскаленного.

5. Теплоотдача увеличится в соответствии с законом Джоуля — Ленца.

6. См. рис. 5.

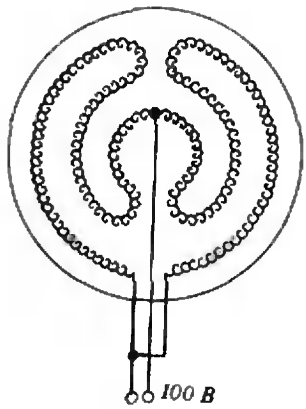


Рис. 5.

7. Сопротивление охлажденной части проволоки становится меньше сопротивления неохлажденной части, общий ток в цепи возрастает, и на неохлажденной части проволоки выделяется больше тепла.
8. Так как теплоотдача растянутой части спирали больше, чем нерастянутой, ее температура будет меньше. Тогда по причинам, указанным в ответе к предыдущей задаче, показания вольтметра, подключенного к нерастянутой части спирали, будут выше.
9. Мощность, потребляемая утюгом в первый момент после включения, во много раз больше номинальной, так как сопротивление холодной спирали мало́. Поэтому велико падение напряжения на подводящих проводах. По мере нагревания спирали потребляемая утюгом мощность падает, приближаясь к номинальной.
10. На нагревание комнаты.
11. В первом случае.
12. В первом случае ток через лампочку *2* начинает идти после того, как нить лампы *1* накалилась и ее сопротивление стало значительным. Во втором случае ток через лампочку 2 начинает идти сразу, т. е. когда нить лампы *1* еще не нагрелась и ее сопротивление мало́.
13. При нагревании полупроводника током его электрическое сопротивление уменьшается.
14. После подключения к источнику проволока начинает нагреваться, ее длина и сопротивление увеличиваются. Вследствие этого уменьшается ток, а вместе с ним — и количество выделившегося тепла. В результате длина проволоки уменьшается. И т. д.
15. Во время введения сердечника в соленоиде возникает ЭДС индукции, вызывающая падение тока в цепи. Следовательно, накал лампы будет уменьшаться.

Микроопыт

Необходимо настроить приемник на программу «Маяк» и с помощью счетчика найти количество электроэнергии, израсходованной утюгом за промежуток между двумя позывными «Маяка», т. е. за полчаса. Затем можно рассчитать мощность утюга и, зная напряжение в сети, определить сопротивление утюга.

[redacted] обмануть интеграл

1. $l=\dfrac{v_0^2}{4\mu g}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha-2\mu^2\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(\sin^2\alpha-\mu^2\cos^2\alpha)}$.

2. $d=Eq^2Bm\,(\beta^2+(Bq)^2)^{-3/2}$.

3. $Q=\dfrac{(L_1/2)(\mathscr{E}/r)^2}{1+R/r+L_2/L_1}$.

4. $Q=\dfrac{\mathscr{E}^2RLC}{2\,(R+r)(L+rRC)}$.

[redacted]у задачу. Возможны варианты

1. $a=g\,\dfrac{m_2-m_1\,(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2}$, если $m_2/m_1>\sin\alpha+\mu\cos\alpha$;

$a=g\,\dfrac{m_1\,(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-m_2}{m_1+m_2}$, если $m_2/m_1<\sin\alpha-\mu\cos\alpha$;

$a=0$, если $\sin\alpha-\mu\cos\alpha\leqslant m_2/m_1\leqslant\sin\alpha+\mu\cos\alpha$.

2. $t=\dfrac{c_1m_1t_1-(c_2t_2+\lambda)m_2}{c_1\,(m_1+m_2)}$,

если $\dfrac{m_2}{m_1}<\dfrac{c_1t_1}{c_2t_2+\lambda}$;

$t=\dfrac{c_2m_2t_2-(c_1t_1+\lambda)\,m_1}{c_2\,(m_1+m_2)}$, если $\dfrac{m_2}{m_1}>\dfrac{c_1t_1+\lambda}{c_2t_2}$;

$t=0$, если $\dfrac{c_1t_1}{c_2t_2+\lambda}\leqslant\dfrac{m_2}{m_1}\leqslant\dfrac{c_1t_1+\lambda}{c_2t_2}$.

3. $d_1=\dfrac{(l-R)\,F}{l-R-F}$ и $d_2=\dfrac{lF}{l-F}$, если $l>R+F$;

$d=\dfrac{lF}{l-F}$, если $F<l<R+F$; решения нет, если $l<F$.

[redacted]II Международная математическая олим[redacted]а

Решения задач 1, 4, 5, 6, вошедших в «Задачник «Кванта» (задачи М1317 — М1320), будут опубликованы позже.
2. Мы имеем $a_1=1$ и $a_2=p$, где p должно быть наименьшим простым числом, которое не делит число n: $a_k=n-1$ и $r=p-1$ — разность прогрессии.
1) Если n — нечетное число, то $a_2=2$, $r=1$, и прогрессия имеет вид 1, 2, ..., $n-1$. Отсюда следует, что n является простым числом.
2) Если n — четное число, то $p\geqslant 3$.
а) Если $p=3$, то $r=2$ и прогрессия имеет вид 1, 3, 5, ..., $n-1$. Отсюда очевидно, что n является степенью двойки: $n=2^m$.
б) Если $p>3$, то n делится на 3. Мы имеем $a_k=a_1+r(k-1)$, откуда $n-1=1+(p-1)(k-1)$. Следовательно, $(p-1)$ делит $(n-2)$. Возьмем произвольный простой делитель q числа $(p-1)$. Тогда q делит $(n-2)$. Так как $q<p$, то q делит n. Общий простой делитель чисел n и $n-2$ может быть только двойкой, поэтому $p-1=2^i$ и $p=2^i+1$. Из простоты числа p следует четность числа i. Далее, $a_3=a_1+2r=1+2(p-1)=2p-1=2^{i+1}+1\equiv 0 \pmod 3$.
Это означает, что 3 делит a_3 и 3 делит n, что противоречит взаимной простоте чисел a_3 и n. Невозможность случая б) завершает доказательство.
3. Пусть A_p — множество чисел из S, делящихся на p, т. е. $A_p=S\cap pN$, и $A=A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$.
Легко видеть, что $|A_2|=140$, $|A_3|=93$, $|A_5|=56$, $|A_7|=40$. Аналогично, $|A_6|=|A_2\cap A_3|=46$, $|A_{10}|=|A_2\cap A_5|=28$, $|A_{14}|=|A_2\cap A_7|=20$, $|A_{15}|=|A_3\cap A_5|=18$, $|A_{21}|=|A_3\cap A_7|=13$, $|A_{35}|=|A_5\cap A_7|=8$, $|A_2\cap A_3\cap A_5|=9$, $|A_2\cap A_3\cap A_7|=6$, $|A_2\cap A_5\cap A_7|=4$, $|A_3\cap A_5\cap A_7|=2$, $|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|=1$. По формуле включений — исключений $|A|=|A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7|=140+93+56+40-46-28-20-18-13-8+9+6+4+2-1=216$.
По принципу Дирихле среди любых пяти чисел множества A найдутся два числа, которые попадают в одно множество A_p ($p=$

$=2, 3, 5, 7$). Эти два числа не могут быть взаимно просты. Следовательно, $n>216$.

Множество A содержит четыре простых числа $\{2, 3, 5, 7\}$ и 212 составных. Из чисел множества S, не лежащих в A, составными являются ровно восемь: 11^2, 11×13, 11×17, 11×19, 11×23, 13^2, 13×17, 13×19.

Таким образом, множество S содержит в точности 220 составных чисел и 60 несоставных (единица и 59 простых).

Пусть T — произвольное множество чисел, удовлетворяющих условиям: $T\subset S$, $|T|=217$. Докажем, что в T обязательно найдется 5 попарно взаимно простых чисел. Предположим, что это не так. Тогда T содержит максимум четыре несоставных числа (единица и простые), иначе из них можно было бы составить искомую пятерку. Тогда множество T содержит минимум $217-4=213$ составных чисел, а множество $S\setminus T$ — максимум $220-213=7$ составных чисел. Следовательно, множество T обязано содержать целиком хотя бы одну из восьми перечисленных ниже пятерок, в каждой из которых все числа попарно взаимно просты:

$$\{2\times23,\ 3\times19,\ 5\times17,\ 7\times13,\ 11\times11\},$$
$$\{2\times29,\ 3\times23,\ 5\times19,\ 7\times17,\ 11\times13\},$$
$$\{2\times31,\ 3\times29,\ 5\times23,\ 7\times19,\ 11\times17\},$$
$$\{2\times37,\ 3\times31,\ 5\times29,\ 7\times23,\ 11\times19\},$$
$$\{2\times41,\ 3\times37,\ 5\times31,\ 7\times29,\ 11\times23\},$$
$$\{2\times43,\ 3\times41,\ 5\times37,\ 7\times31,\ 13\times17\},$$
$$\{2\times47,\ 3\times43,\ 5\times41,\ 7\times37,\ 13\times19\},$$
$$\{2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 13^2\}.$$

Международная олимпиада по информатике

I тур. В основе решения задачи лежит перебор с возвратом. На каждом шаге путем последовательного использования представленных правил определяется возможность размещения следующего номера в незанятых позициях матрицы. Процесс заканчивается, если удается матрицу заполнить полностью или ни одно из имеющихся правил не может быть использовано для заполнения таблицы. В последнем случае изменяется последовательность выбора правил и процесс повторяется. Если при выполнении задания А) достаточно определить только один способ нумерации таблицы для заданной стартовой позиции, то в задании В) требуется определить все возможные варианты.

Проверка задания А) осуществлялась путем визуального контроля результатов заполнения матрицы. Правильные ответы для задания В) следующие (приведена стартовая точка и количество вариантов): (1, 1) — 552; (1, 2) — 548; (1, 3) — 552; (1, 4) — 548; (1, 5) — 552; (2, 2) — 412; (2, 3) — 400; (2, 4) — 412; (2, 5) — 548; (3, 3) — 352; (3, 4) — 400; (3, 5) — 552; (4, 4) — 412; (4, 5) — 548; (5, 5) — 552.

II тур. При выполнении задания 1 следует обратить внимание на правило формирования S-термов. В частности, в соответствии с определением последовательность SSS не является S-термом. Для $n=1$ число возможных термов равно 1, для $n=2$—1, для $n=3$—2, для $n=4$—5, для $n=5$—14, для $n=8$—429, для $n=10$—4862.

В качестве структуры данных для внутреннего представления S-термов (см. задание 2) может быть использован либо связанный список, либо двоичное дерево. Например, для S-терма (((S(SS))((SS)S))((SS)(SS))) линейный список может иметь вид

$$\to3\to1\to0\to2\to0\to0\to2\to0\to1\to0\to\text{nil}.$$

При выполнении задания 4 необходимо четко уяснить понятие «ненормализованный» S-терм. В частности, если к исходному S-терму нельзя применить процедуру редукции, то такой S-терм не считается «ненормализованным». Если задан S-терм вида ((((SS)(SS))S)(SS)), то в результате использования процедуры нормализации получится последовательность S-термов

(((SS)((SS)S))(SS))→((S(SS))(((SS)S))SS)))→
→((S(SS))((S(SS))(S(SS)))).

В то же время нормализация S-терма ((((SS)S)((SS)S))((SS)S)) после 30 шагов не закончится, поэтому такой S-терм будет считаться «ненормализованным».

Для проверки правильности выполнения задания 5 можно воспользоваться следующей таблицей:

n	Число S-термов	Число «ненормализованных» S-термов
1	1	0
2	1	0
3	2	0
4	5	0
5	14	0
6	42	0
7	132	2
8	429	41
9	1430	276

Ночь перед Рождеством

Вы, конечно, попробовали поставить эксперимент? Тогда вы увидели, что как только вы отпускаете пальцы, бумажка начинает разма-

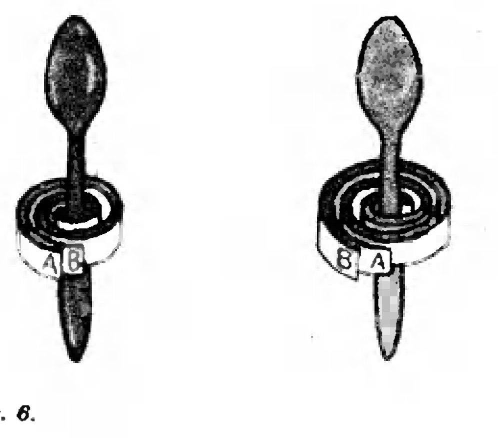


Рис. 6.

тываться и делает несколько оборотов вокруг ложки. Вот тут и «зарыта собака». Посмотрите на рисунок 6. Когда бумажка намотана на ложку, одна из половинок полоски — снаружи (*A*), другая — внутри (*B*). При разматывании эти слои могут поменяться местами, и слой *A* окажется под слоем *B*. Видите? Ложка оказалась вне петли! Это трудно заметить глазом, если вы обернули бумажку раз семь. Но теперь «маленькое чудо» неизбежно. Будете еще беспокоить души предков по всяким пустякам?

[redacted]нт для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Первое число — 147, второе — 111.
2. Рассмотрим грань, на которой написано число 35. Если на противоположной ей грани стоит нечетное число, то на двух других невидимых гранях стоят разные четные простые числа. Но существует единственное простое четное число — 2, следовательно, оно и стоит против числа 35. Тогда сумма чисел на противоположных гранях равна 37, и на гранях, противоположных граням с числами 14 и 18, стоят числа 23 и 19.
3. Играло 8 шахматистов.
4. Зашифровано слово ФУФАЙКА.
5. Отрежем от пятиугольника треугольники *ABC* и *CDE* (рис. 7) и сложим из них новый треугольник (рис. 8). Очевидно, что полученный треугольник равен оставшемуся треугольнику *ACE*. Нетрудно заметить, что площадь каждого из этих треугольников равна 0,5, следовательно, площадь пятиугольника равна 1.

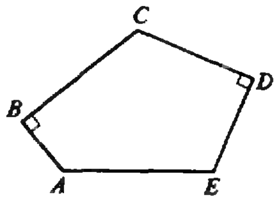


Рис. 7.

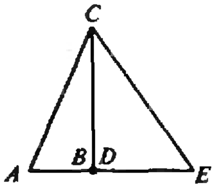


Рис. 8.

Напечатано в 1991 году

АНКЕТА 12 — 91

Благодарим всех читателей, приславших свои ответы на вопросы анкеты и пожелания. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале — его содержании и оформлении.

Мы продолжаем публикацию нашей анкеты (для новых читателей: она появляется в журнале раз в три месяца).

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 12 — 91».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________

Круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________

3. Какие статьи и задачи из номеров 10—12 (номер укажите) Вам понравились? ____________

Вы использовали при подготовке к уроку? ______

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ______

5. Какая обложка из номеров 10—12 Вам больше всего понравилась? ______

6. Ваши вопросы и пожелания: ______

Номер подготовили:

А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, Е. Коршунова, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Д. Крымов, Н. Кузьмина, Т. Локтикова,
С. Лухин, Э. Назаров, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 24.09.91. Подписано к печати 11.11.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,41.
Тираж 87 452 экз. Заказ 1641. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственной ассоциации предприятий, объединений и организаций полиграфической промышленности «АСПОЛ»
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ГРОССМЕЙСТЕРЫ ПРОТИВ «ДИП СОТ»

Успехи «Дип сот», уникальной американской программы, повергли в уныние многих шахматистов. Уже чуть ли не всерьез обсуждаются сроки поединка, в котором в единоборстве равных сразятся два чемпиона — «Дип сот» и Г. Каспаров. Даже сам шахматный король не исключает такого матча в скором времени.

Однако для подтверждения своих амбиций машине требовалось удачно выступить в полноценном круговом турнире с участием видных гроссмейстеров. И вот такая возможность предоставилась: весной этого года в Ганновере состоялся турнир, где семь немецких гроссмейстеров решили сразиться друг с другом, а заодно и проверить своего электронного коллегу из США (общение с «Дип сот» происходило, как обычно, по компьютерной сети связи). В борьбу с «великолепной семеркой» вступила новая версия программы «Дип сот», отличающаяся огромным быстродействием — она просматривала 10 миллионов позиций в секунду вместо 720 тысяч в первой версии (разработчики, кстати, мечтают о миллиарде).

Увы, первая попытка не удалась — в Ганновере «Дип сот» потерпела фиаско, чем немало огорчила своих поклонников. Робот набрал 2,5 очка из семи и занял предпоследнее место. Это гроссмейстерское состязание благодаря участию в нем компьютера вызвало в Германии немалый ажиотаж. Все издания подробно рассказали о турнире, привели партии «Дип сот».

В первом туре человек набросился на машину с такой энергией, будто хотел растерзать ее. Наверное, встречаясь с подобным себе, Г. Грюнберг не позволил бы такие вольности. «Дип сот» легко разобралась в тактических осложнениях и взяла верх.

Г. Грюнберг — «Дип сот»
Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. Kf3 a6. Позволяет белым получить сильную инициативу за пешку. **4. e4 b5 5. a4 Cb7 6. ab ab 7. Л:a8 C:a8 8. Kc3 e6 9. Ce2 c6 10. 0—0 Kd7 11. e5 Ke7 12. Cg5 Фb8 13. Ke4 Kd5 14. Фc2 h6 15. Ch4 c5 16. Лa1 cd 17. K:d4 Kb4.** Ферзь белых под боем, и скромное **18. Фb1** сохраняло за ними лучшие шансы. Пешка e5 неуязвима, а пешка b5, наоборот, рано или поздно падет, вместе с ней рухнет и построение черных. Так, на 18...Cd5 следует простое 19. Kc3, и черные на грани поражения (19...Ф:e5 20. K:d5! Ф:d5 21. Cf3) — король застрял в центре, фигуры отстали в развитии. Человек же пускается в авантюру...

18. Л:a8? Ф:a8 19. K:b5. Угроза мата или шаха на c7 выглядит более чем серьезно, но она отражается, а качество потеряно безвозвратно. **19... K:e5!** Сыграно без предрассудков: ферзь белых пока тоже под боем и промежуточный удар конем решает дело.

20. Фd1 Kd5! 21. Kec3 Kpd7! Удивительный ход: король идет в центр, ликвидируя все опасности. **22. Cg3 Kd3!** Одной пешкой можно и поступиться. **23. b3 K:c3 24. K:c3 Фa5 25. C:d3 cd 26. Ф:d3+ Kpe8.** У черных выигранная позиция, и хотя человек сдаваться не любит, пришлось спустя 20 ходов это сделать.

После этой победы «Дип сот» вместе со своими создателями пребывала в состоянии эйфории. Казалось, что за первой победой последует вторая и т. д. Однако во втором туре после тонкого позиционного лавирования, когда обе стороны построили неприступную крепость, последовало соглашение на ничью. Кстати, роботу в этой партии против гроссмейстера К. Бишоффа трудно было предъявить какие-либо претензии. А вот в третьем туре с машиной произошел конфуз — на пятом ходу она произвела размен пешек, который вряд ли пришел бы в голову квалифицированному шахматисту...

Э. Лоброн — «Дип сот»
Дебют Рети

1. Kf3 d5 2. g3 c6 3. Cg2 Cg4 4. c4 e6 5. b3 dc? 6. bc. Итак, в результате размена на c4 черные отдали центр и уступили линию «b». Зачем?! Наверное, компьютер сначала планировал здесь 6...C:f3 7. C:f3 Фd4, выигрывая пешку. Однако, продвинувшись на ход вперед, он убедился, что в этом случае после 8. Фb3! ладью забирать невыгодно — 8...Ф:a1 9. Ф:b7 и т. д. В результате размен потерял какой-либо смысл. Гроссмейстер убедительно доказал, что подобные уступки не остаются безнаказанными.

6...Kd7 7. Cb2 Фb6 8. Фc2 Kgf6 9. 0—0 Cd6 10. d3 0—0 11. Kbd2 e5 12. Лab1 Фa6. Заняв это поле, ферзь обрек себя на жалкое существование. **13. h3 Ce6 14. Kg5 Cf5 15. Cc3 Kc5 16. e4 Cg6 17. f4 ef 18. gf Ka4 19. Ca1 Kd7 20. e5.** Пешечная масса белых готова прийти в движение, впрочем решает прямая атака на короля.

20...Cc5+ 21. Kph2 Ce3 22. Kge4 C:d2 23. K:d2 Cd5 24. Ce4 C:e4 25. K:e4 Kac5 26. Kd6 b6 27. Лg1 g6 28. f5 Kb7 29. Ke4 Фa3 30. Фd2 Kbc5 31. Фh6 Ф:a2+ 32. Лg2. Черные сдались.

В четвертом туре в немного скучноватой игре «Дип сот» одолела гроссмейстера У. Бенша и поправила свои турнирные дела. Болельщики опять воодушевились: 2,5 очка из четырех — неплохой результат, можно побороться за высокое место. Однако в дальнейшем машина не выдержала напряжения и проиграла все три оставшиеся партии. В пятом туре победу над «Дип сот» одержал самый титулованный гроссмейстер в турнире В. Унцикер, в шестом машина проиграла будущему победителю М. Вальсу, а в последнем туре безропотно сгорела против гроссмейстера Р. Тишбирека. Короче говоря, в конце турнира робот совсем расклеился... Создатели программы, анализируя после Ганновера новую версию, обнаружили в своем детище некоторые «болезни роста». Ну что же, «Дип сот» еще слишком молода, подождем до следующего подобного турнира. Пусть покажет себя.

Е. Гик

70 коп.

Индекс 70465

Наш постоянный читатель и автор И. Акулич прислал нам игру «Пирамида», купленную им в магазине, и задачу, связанную с этой игрой. Автором игры является В. Дмитриев, а предлагаемое новогоднее оформление принадлежит редакционному художнику. Попробуйте поиграть в эту игру, а потом решить задачу И. Акулича.

Правила игры

Игра состоит из игрового поля и 12 фишек 2-х цветов, по 6 каждого цвета. Играют вдвоем.

Фишки расставляют на клетках первого ряда игрового поля. Один играющий слева, другой — справа.

Ходят поочередно. Играющий имеет право выполнить один ход (вертикальный или горизонтальный и дополнительные продвижения).

Вертикальный ход. *Его имеет право выполнить только фишка нижнего ряда. При этом она перемещается на одну из двух соседних клеток следующего ряда.*

Горизонтальный ход. *Фишка может перемещаться по своему ряду на любое количество свободных клеток.*

Дополнительное продвижение. *В процессе игры три фишки могут занять положение треугольником (две снизу, одна сверху). Хозяин верхней фишки после очередного хода или вместо него может ее продвинуть на клетки следующего ряда. Побеждает тот, кто первым достигнет вершины пирамиды.*

Задача: Кто победит, если оба партнера будут играть наилучшим образом?

Решение читайте в следующем номере.